

Recap. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ は点 $a \in D$ 2

連続とは $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ と表せる.

f が $E \subseteq D$ で連続とは 全ての $a \in E$ に対して
 f が a で連続となること.

連続関数の性質

定理 5.1 (教科書定理 1.11) f が閉区間 $[a, b]$ 上の関数のとき, f が連続なら, f は最大値最小値をとる.



➡ つまり, $\alpha, \beta \in [a, b]$ 2

— 全ての $x \in [a, b]$ に対して, $f(x) \leq f(\alpha)$
と表す ($f(\alpha)$ は最大値)

— 全ての $x \in [a, b]$ に対して $f(\beta) \leq f(x)$
と表す ($f(\beta)$ は最小値)

と表せることがわかる.

注意 この定理で f が連続であることと 閉区間で定義されていることは必要.

たとえば $[-1, 1]$ 上の関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} x & \\ 0 & \end{cases}$$

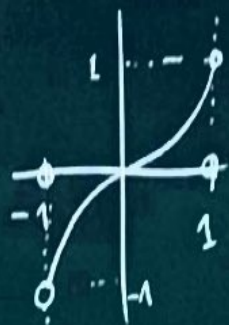
2 枚有理数 $\frac{p}{m}$ と $\frac{q}{n}$ の約分
 $\frac{p}{m}$ と $\frac{q}{n}$ と $m > 0$

よって f は連続.

よって f は いくつか 大きな 値をとれるので
最大値も最小値も持たない。

$f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$ とすると

f は 系 4.7 から連続だが $f[(-1, 1)] = (-1, 1)$



なので f は最大値も最小値も
持たない。



定理 5.2 (中間値の定理) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

連続関数として, $[a, b] \subseteq D$ のとき, f は $[a, b]$ 上

$f(a)$ と $f(b)$ の間にあるどの値もとる。

(つまり, $f(a) \leq f(b)$ の場合には $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

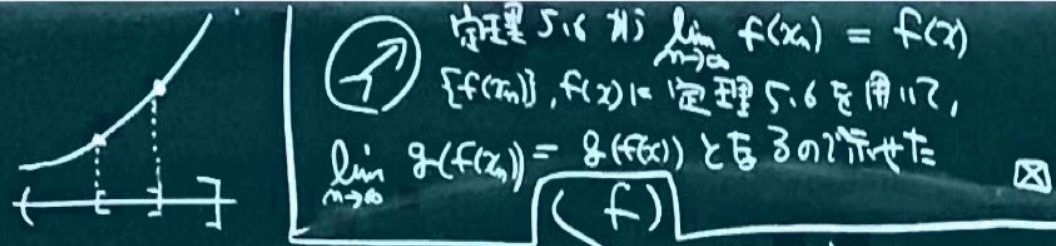
$f(a) \leq y \leq f(b)$ に対し, $a \leq x \leq b$ で $f(x) = y$ とするものがとれる。
 $f(b) \leq y \leq f(a)$

系 5.3 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 連続なら, $f[D] = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D, y = f(x)\}$

は閉区間になる。

証明 定理 5.1 より f は $[a, b]$ 上最大値と最小値も
とる

② c のとき $f[D] \subseteq [\beta, d]$ で
 $c, d \in [a, b]$ 2 $f(c) = \alpha$ $f(d) = \beta$ と仮定する。
 定理 5.2 45, $f[D] \supseteq [\beta, d]$ 7 があるの2
 $f[D] = [\beta, d]$. $(-\infty, \infty)$ と含め
 系 5.4 区間 D 上の関数 f が連続で
 真に単調 (つまり真に増加 または真に減少) なら
 $f[D]$ も (端点に内包) 同じ種類の区間で
 f は D から $f[D]$ への 1-1 onto 関数である。
 証明 (ハイン) D の内部部分区間上系 5.2 を
 用いればよい。



定理 5.5 区間 D 上の関数 f が真に単調で
 連続なら 系 5.4 45, $f: D \rightarrow f[D]$ は
 1-1 onto である。 $f[D]$ も区間
 $f[D]$ 上 f の逆関数 f^{-1} が存在する。 f^{-1} も連続である。

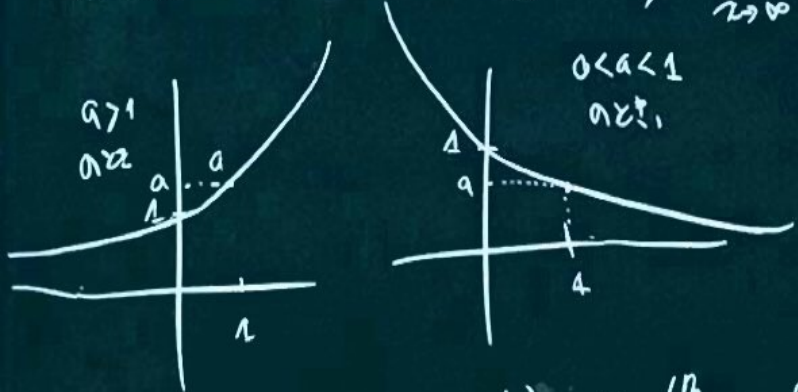
応用 $a > 0$ $a \neq 1$ とする。
 $a^x: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty); x \mapsto a^x$
 とすると, a^x は連続で
 $\uparrow$ a^x のように a^x を自然に拡張して
 a^x を定義する。 $\square$

(*) つまり無理数 α に対しては

$$a^\alpha = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x \text{ 有理数}}} a^x$$

と $a^{(\cdot)}$ を定義する。

① $a > 1$ なら $a^{(\cdot)}$ は真に増加 $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
 $0 < a < 1$ なら $a^{(\cdot)}$ は真に減少 $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$



つまり定理 5.6 より, $a^{(\cdot)}$ の $\mathbb{R}$ の像は $(0, \infty)$ となる。
 (主として 5.4)

$a^{(\cdot)}$ の逆関数 $\log_a(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は
 定理 5.5 より連続である。

定理 4.5 より次が成り立つ:

定理 5.6 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ に対し (次の同値)

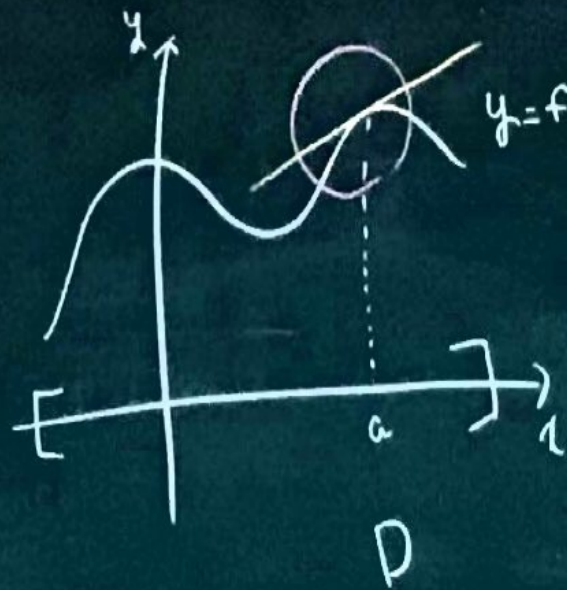
- (1) f は D で連続
- (2) すべて D の点列 $\{x_n\}$ (つまりすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $x_n \in D$)
 と $x \in D$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ なら, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ となる。

定理 5.7 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ $f[D] \subseteq D$ のとき
 合成関数 $g \circ f$ とおけば, f と g が連続ならば $g \circ f$ も連続となる。

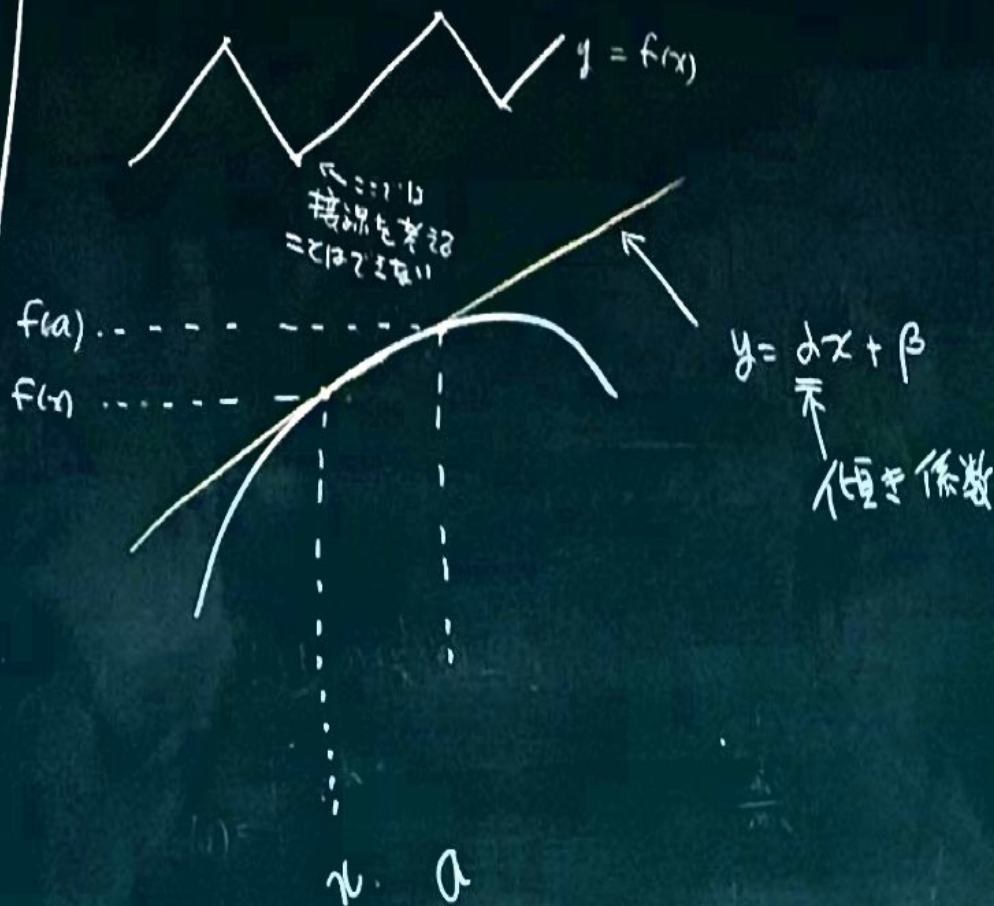
証明 定理 5.6 より すべて D の点列 $\{x_n\}$ と $x \in D$ に対し
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} g \circ f(x_n) = g \circ f(x)$ つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(x))$ となる。①

関数の微分, 導関数

(関数)のグラフの接線



関数 f が "凸" 性質
を持つときグラフの
接線を
近似としてみる



$$\Delta = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$\Delta = ?$

グラフ $y = f(x)$ は
a 点接線を引く

$$\Delta = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{が存在するとすれば、この極限を}$$

接線の傾き係数と思うことにする。

接線グラフは $y = \Delta x + \beta$ で $y = f(a)$ $x = a$ は
この接線と点 a で交わるようにする。

$$f(a) = \Delta a + \beta \quad \text{つまり} \quad \beta = f(a) - \Delta a \quad \text{となり}$$

$$y = \Delta x + (f(a) - \Delta a) \quad \text{が接線の方程式である。}$$

$$\Delta = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{?} \quad x - a = h \quad \text{よって、}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad x \rightarrow a \Leftrightarrow h \rightarrow 0$$

を f の a 点微分係数とよみ $f'(a)$ とあらわす。

$E \subseteq D$ に含まれるすべての a に対して微分係数が存在するとき f は E で微分可能であるといふ。

$$\text{関数 } D \rightarrow \mathbb{R}; a \mapsto f'(a)$$

を f の D 上の導関数とよみ f' とあらわす。