Recap: 関数 $f: D \to \mathbb{R}$ に対し

f の $a \in D$ での微分係数を

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ で

定義して（これを $f'(a)$ であらわす.）

各 $x \in D$ に対して $f'(x)$ が存在するとき

f は D で微分可能であるという

関数 $D \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ を f の導関数という

この関数も f' であらわす.

$f'(a)$ が存在するとき, f は a で微分可能であるという

定理6.1 $f: D \to \mathbb{R}$ が $a \in D$ で微分可能なら,

f は a で連続である $\left(\underbrace{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}_{(*)}\right)$.

したがって $f: D \to \mathbb{R}$ が D で微分可能なら, f は D で連続である. 逆は必ずしも成り立たない.

証明. f が a で微分可能として $(*)$ を示す.

このためには, $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$ を言えばよい.

$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在すると仮定して;

$\lim_{x\to a} f(x) - f(a)$

定理4.2, (-1), (2) による

$$= \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right) = *$$

定理 4.2, (3) による

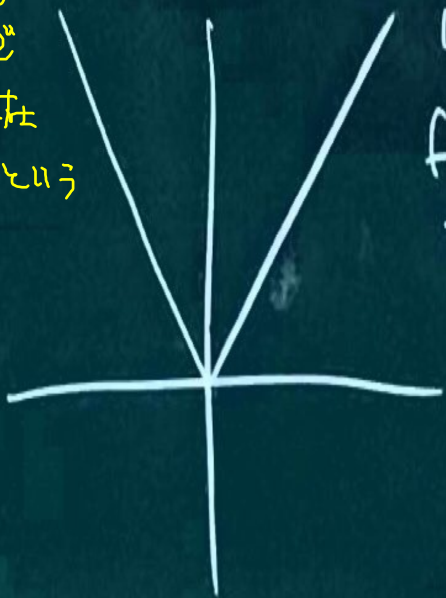
$$* = \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a} x-a}_{=0} = 0$$

f が a で微分可能であることから，この極限は存在する.

点 a で連続だが微分可能でない例としては

たとえば $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto|x|$ とすると

等式を右から逆に読むことで "$\lim_{x\to a} f(a)$ が存在すると仮定して" という条件は落せる.



は $x=0$ で連続だが

f は $x=0$ で微分可能でない

☒

定理 6.2 (教科書 7.3)

以下では $f: D\to\mathbb{R}$ $g: E\to\mathbb{R}$ は D と E で微分可能とする

$(a)'=0$; ($\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto a$ の微分は $\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto 0$)

(0) $(x)'=1$ ($\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto x$ の微分は $\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto 1$)

(1) $(cf)' = cf'$

(2) $(f+g)' = f'+g'$ $\quad(D\cap E \ni x\mapsto f(x)+g(x)\in\mathbb{R})$

(3) $(fg)' = f'g+fg'$ $\quad(D\cap E \ni x\mapsto f(x)g(x)\in\mathbb{R})$

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ $\quad\left(D\cap\{x\in E\mid g(x)\neq 0\}\ni x\mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}\in\mathbb{R}\right)$

(1): $f(x)=x$ として

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{f(x+h)}^{x+h}-\overbrace{f(x)}^{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$f(x)=a$ として

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{f(x+h)}^{a}-\overbrace{f(x)}^{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

(3):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underbrace{\lim_{h\to 0}g(x+h)}_{=g(x)\ \text{定理6.1}}\ \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{=f'(x)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=f(x)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{=g'(x)}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

したがって $(fg)'=f'g+fg'$

他は略。 ⊠

系6.3 $n\in\mathbb{N}$ に対し $(x^n)'=nx^{n-1}$

証明 nに関する帰納法で示す.

$n=1$ のとき $x^1=x$ だから $(x)' \overset{\text{定理6.2,(a)}}{=} 1 = 1\underbrace{x^0}_{1}$

となり式は成り立つ

式が n に対して示せたとして $n+1$ のとき

$$(x^{n+1})'=(xx^n)'=\underbrace{(x)'}_{1}x^n+x\underbrace{(x^n)'}_{nx^{n-1}}$$

帰納法の仮定と $n=1$ の場合

$$= x^n+nx^n$$

$$=(n+1)x^n$$

となり $n+1$ の場合も上式は成り立つ. ⊠

系3と定理6.2から すべての有理関数の導関数が計算できる.

$$(e^x)'=\lim_{h\to0}\frac{\overset{=e^xe^h}{e^{x+h}}-e^x}{h} \quad e^x\text{の定義から}$$

$$=\lim_{h\to0}e^x\frac{e^h-1}{h}=e^x\overbrace{\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}}^{=1}=e^x$$

$(a^x)'=\cdots$

合成関数の微分法

定理 6.4 $f: D \to \mathbb{R}$　$g: E \to \mathbb{R}$

$f[D] \subseteq E$ で f と g は D と E で微分可能とする　このとき，$g \circ f$ も微分可能で

$\left(g\circ f : D \to \mathbb{R} ; x \longmapsto g(f(x)) \right)$　$x \in D$ に対し

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

が成り立つ。

証明は教科書または ネット上の解説を参照

http://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-elementary.pdf
の定理 1.7

応用例

$a > 0$ とするとき $(a \neq 1)$

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\log a} \right)^x \right)'$$

$$= \left(e^{(\log a)x} \right)'$$

$x \mapsto \log a\, x$ と $x \mapsto e^x$ の合成関数と見ることができる。

$$= \underbrace{e^{(\log a)x}}_{= a^x} \cdot \log a$$

$$= \log a\; a^x$$

$\log e = 1$ なので

$(e^x)' = e^x$ はこの特別の場合である。

$a = e^{\log a}$ である

$\log$ は $e^{\cdot}$ の逆関数なので これらの合成は恒等関数となるから よい

$$(x^4)^2 = x^{4\cdot 2}$$

定理 6.5

I を区間として I 上の関数 f が微分可能で 1-1 とする。このとき、f は定理 6.さ から連続なので真単調で $f[I]$ はある区間 J になるが、このとき f の J 上の逆関数がとれる（f^{-1}）。このとき $f'(x) \neq 0$ がすべての $x \in I$ に対し成り立つとき、f^{-1} も微分可能で $y \in J$ に対し

$$(\dagger) \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

である

証明（もどき）

f^{-1} が微分可能を仮定すると $(\dagger)$ はかんたんに導ける。

$$f \circ f^{-1}(y) = y$$

だから

$$(f \circ f^{-1})'(y) = 1$$

定理 6.4 ⇒

$$f'(f^{-1}(y))\,(f^{-1})'(y) = 1 \implies \text{両辺を } f'(f^{-1}(y)) \text{ でわると}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

⊠

定理 6.5 の応用　$\log x = (e^{\cdot})^{-1}$ を思い出すと，

$f(x) = e^x$ として，　$f'(x) = e^x$

$\log y = f^{-1}(y)$

だから

$$(\log y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$= \frac{1}{e^{\log(y)}} = \frac{1}{y}$$

したがって $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ である．

例1 $[0,\infty) \to \mathbb{R}$　$x \mapsto x^x$ の微分を考える．

$(x^x)'$

$$\boxed{\log a^b = b \log a}$$

$$(\log(x^x))' = (x \log x)'$$

合成関数として見る

$$= (x)' \log x + x(\log x)'$$

定理 6.2 (3)

$$\frac{1}{x^x}(x^x)' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

両辺に x^x をかけると

$$(x^x)' = (\log x + 1)x^x,$$

点 $a \in \mathbb{R}$ に対し a の ε 近傍 とは

きんぼう
neighborhood

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の形の
開区間のこととする。

極小値

$f : I \to \mathbb{R}$ が $a \in I$ で 極大値をとる

とは、a のある ε-近傍 E をとると すべての

点 $x \in E \cap I$ について

$f(x) < f(a)$

$f(x) > f(a)$

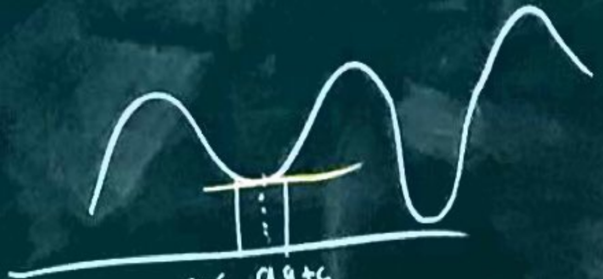
となること

定理 6.6

$f : I \to \mathbb{R}$ で a は I の内点とする。

$f(x)$ が a で微分可能で
$f(x)$ は a で極大値または極小値をとるとき

$f'(a) = 0$ となる。



$a \in I$ が I の内点とは、
a のある ε-近傍が I に含まれる
こと。