定理 6.6 $f: I \to \mathbb{R}$ で a が I の内点のとき（つまり a のある ε-近傍が I に含まれるとき） f が a で微分可能で f は a で極値をとるとき.
（つまり極大値または極小値）

$f'(a)=0$ である.

証明 たとえば f が a で極大値をとるとすると

h が十分小さいとき

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\le 0}}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\le 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \le 0$$

$$\lim_{h\to 0-0} \frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\le 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \ge 0 \quad \ge 0$$

したがって

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0 \text{ である.}$$

⊠

注意 $f: I\to\mathbb{R}$ が a で最大値（最小値）をとるなら f は a で極大値（極小値）をとる.

定理5.1 f が閉区間 I 上の連続関数なら f は I で最大値（最小値）をとる.

系7.1（Rolleの定理） f が $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能で, $f(a)=f(b)$ なら

$f'(x)=0$ となる $a<x<b$ が存在する.

証明 定理5.1から f は I で最大値 M
最小値 m をとる. $M=m$ なら $M=m=f(a)=f(b)$
で f は定数値関数 $f(x)=f(a)$ となっている したがって
任意の $a<x<b$ で $f'(x)=0$ となる.
そうでなければ $m<M$ で m と M の少くとも1つは
$f(a)$ とちがう値となっている たとえば $f(a)\neq M$ (つまり
$(f(a)<M)$ とすると, $x\in[a,b]$ を $f(x)=M$ とすると
$f(a)=f(b)\neq M$ だから $x\in(a,b)$ で 定理6.6により,
$f'(x)=0$ である.

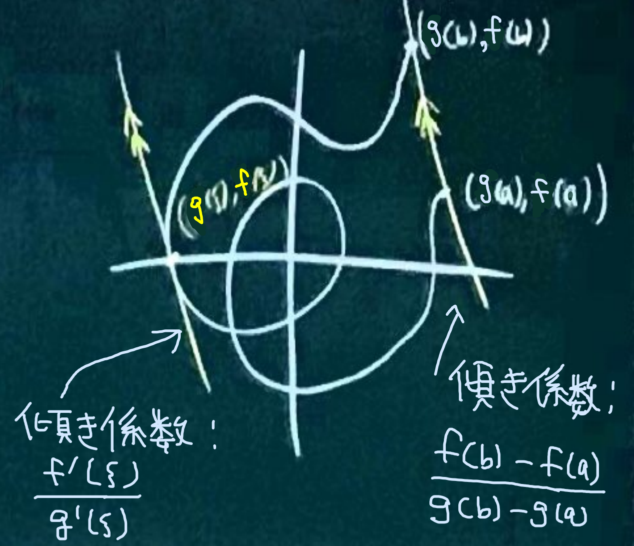
☒

定理 7.2 (Cauchyの平均値定理)

f, g を $[a,b]$ で連続で (a,b) で
微分可能として, $g(a)\neq g(b)$ で $f'(x)$ と $g'(x)$
の両方が0になるような $x\in(a,b)$ は存在しないとする
このとき $a<\xi<b$ で $[a,b]\ni t\longmapsto (g(t),f(t))\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となるものが存在する.



証明 $[a,b]$ 上の関数 F を $x\in[a,b]$ に対し

$$F(x) = \big(f(x) - f(a)\big) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)$$

$$F(a) = \underbrace{\big(f(a) - f(a)\big)}_{0} - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\underbrace{\big(g(a) - g(a)\big)}_{0}$$

$$= 0$$

$$F(b) = \big(f(b) - f(a)\big) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{g(b)-g(a)}}\cancel{\big(g(b) - g(a)\big)}$$

$$= 0$$

定理 6.7 により $F(x)$ は $[a,b]$ で連続で
定理 ＿＿ (a,b) で微分可能なので Rolleの定理
(系 7.1) により、 $a<\xi<b$ で $F'(\xi)=0$
となるものが存在する

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$ だから、

⊕ $$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)$$

$f'(\xi)$ と $g'(\xi)$ の少なくとも一方は0でない。 $f'(\xi)\neq 0$ なら、 $g'(\xi)\neq 0$
となる $f'(\xi)=0$ なら $g'(\xi)\neq 0$ である。いずれにしても $g'(\xi)\neq 0$
そこで ⊕ の両辺を $g'(\xi)$ でわり

$$0 = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cancel{g'(\xi)} \cdot \frac{1}{\cancel{g'(\xi)}}$$

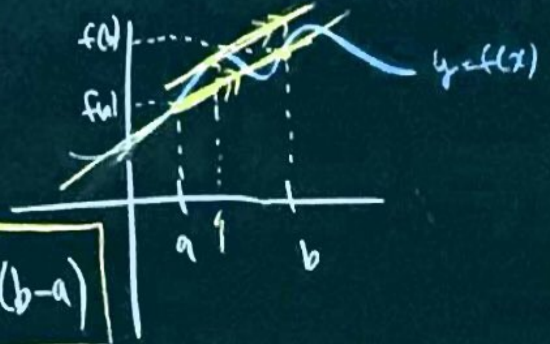
となり $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ である. ∎

系 7.3 (平均値定理) f を $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とする このとき $a < \xi < b$ で

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)}$$



証明 $g(x) = x$ とすると, $g'(x) = 1 \neq 0$

により この f と g に 定理7.2を適用できる.

したがって $a < \xi < b$ で

$$\frac{f(b)-f(a)}{\underbrace{g(b)-g(a)}_{= b-a}} = \frac{f'(\xi)}{\underbrace{g'(\xi)}_{= 1}}$$

となる ものがとれるが,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

となり この ξ が求めるようなものである. ∎

Taylor の定理

f の導関数 f' の導関数を f'' とあらわす

この導関数を f''' とあらわす。 $\frac{d^2f}{dx^2}$ $D^2(f)$ とも書く

$\frac{d^3f}{dx^3}$ $D^3(f)$ とも書く

一般に f の $\underbrace{\text{導関数の導関数} \cdots \text{の導関数}}_{n\text{回}}$ を

f の n次導関数とよび $f^{(n)}$

$\frac{d^nf}{dx^n}$ $D^n(f)$ などとあらわす。

特に $f^{(0)} = f$ $f^{(1)} = f'$ $f^{(2)} = f''$ とする。

f が n回微分可能で n次導関数が連続のとき

f は C^n-級であるという 微分可能なら連続

(定理 6.1) なので $m < n$ f は C^n-級なら

C^m-級である。

定理 7.4 (Taylor の定理) f を区間 I で n 回微分可能な関数とする。$a, b \in I$ $a \neq b$ (つまり $a < b$ または $b < a$) に対し、a と b の真の間にある ξ (つまり $a < \xi < b$ または $b < \xi < a$) で、

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n}$$

となるものがある

ここで　$0! = 1$　$1! = 1$　$(n+1)! = n!(n+1)$

したがって

$$k! = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k-1 \cdot k$$

である。

Σ シグマ　S summa ラテン語の和

は、

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

とも書く。

証明は、たとえば

http://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/bineki-1-2017-06-01.pdf

を参照！

特に b を x と書きなおすと、ξ は x にも依存するので ξ_x

$$(\dagger)\quad f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{x\text{の多項式}} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-a)^n}$$

と書ける

これ示は $f(x)$ の $n-1$ 次多項式での近似を与えるものとなっている

(＊) で $a=0$ とおくと

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} x^n$$

であるが　ξ_x は $\overset{a}{\underset{\shortparallel}{0}}$ と x の間の数なので

ある $0 < \theta_x < 1$ をとって　$\xi_x = \theta_x x$ とかける。

したがって

(＊) $f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta_x x)}{n!} x^n$

である

これを Maclaurin の定理とよぶ

応用例　$f(x) = e^x$　$(e^x)' = e^x$ だから

$f^{(n)}(x) = e^x$ である。したがって (＊) は、この f に対しては、ある $0 < \theta_x < 1$ に対し

$$e^x = \overset{\shortparallel 1}{e^0} + \frac{\overset{\shortparallel 1}{e^0}}{1!} x^1 + \frac{e^0}{2!} x^2 + \cdots \frac{e^0}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{e^{\theta_x x}}{n!} x^n$$

$$= 1 + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\frac{1}{1!}} x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{e^{\theta_x x}}{n!} x^n$$

$$\frac{e^{\theta_x x}}{n!} x^n \leq \frac{e^x}{n!} x^n$$

ただし $n \to \infty$ のとき $\frac{e^x}{n!} x^n \to 0$