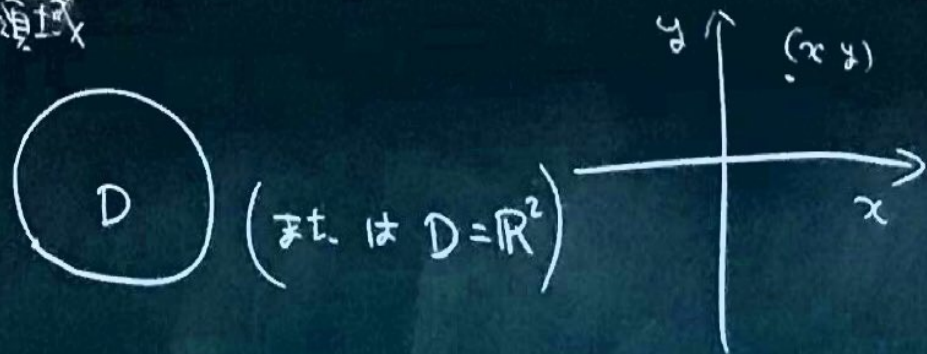


$$D \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

領域



$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ 連続}$$

$$x = (x_1, y_1) \quad y = (x_2, y_2) \text{ のとき}$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

↑
x と y の距離

$\varepsilon > 0$ 任意, 点 x の ε -近傍 $U_\varepsilon(x)$

neighborhood

近 Umgebung

とき

$$U_\varepsilon(x) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid d(u, x) < \varepsilon\}$$

とき



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (\Leftrightarrow) \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad x \in U_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

と表すことができる

f が $a \in U$ で連続とは $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ と表すこと

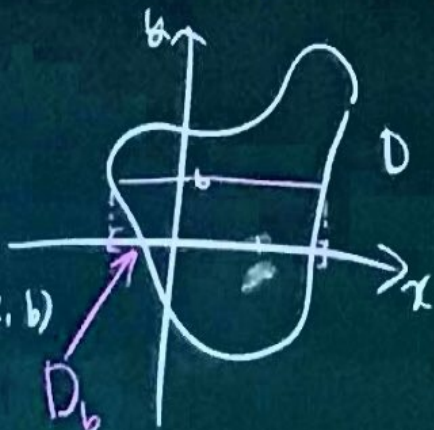
f が $V \subseteq U$ ($V=U$ も可) で連続とは $\forall a \in V$ で f が連続となること。

偏微分 (partial differentiation)

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{と} \quad (a, b) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$D_b = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in D\}$$

$$f(x, b): D_b \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x, b)$$



という一変数関数 $\Rightarrow$ 偏微分係数を
" a での偏微分係数"

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad f_x(a, b) \quad \text{と表され} \quad f(a, b) \text{ の } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ 係数を偏微分係数と呼ぶ}$$

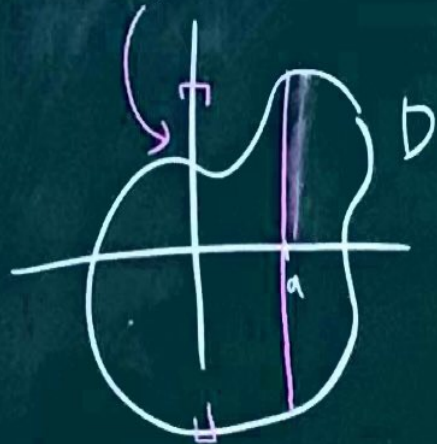
$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ は x の $(a, b) \in D$ で定義される

関数 $D \rightarrow \mathbb{R}; (a, b) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

は f の D での x -偏導関数とよび、 $\frac{\partial f}{\partial x}$
 f_x とおきかわる。

同様に $(a, b) \in D$ に対し、 $D^a = \{y \in \mathbb{R} \mid (a, y) \in D\}$

とし



$f(a, y) : D^a \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto f(a, y)$ とおくと
この (変数 y に對する) b での微分係数を

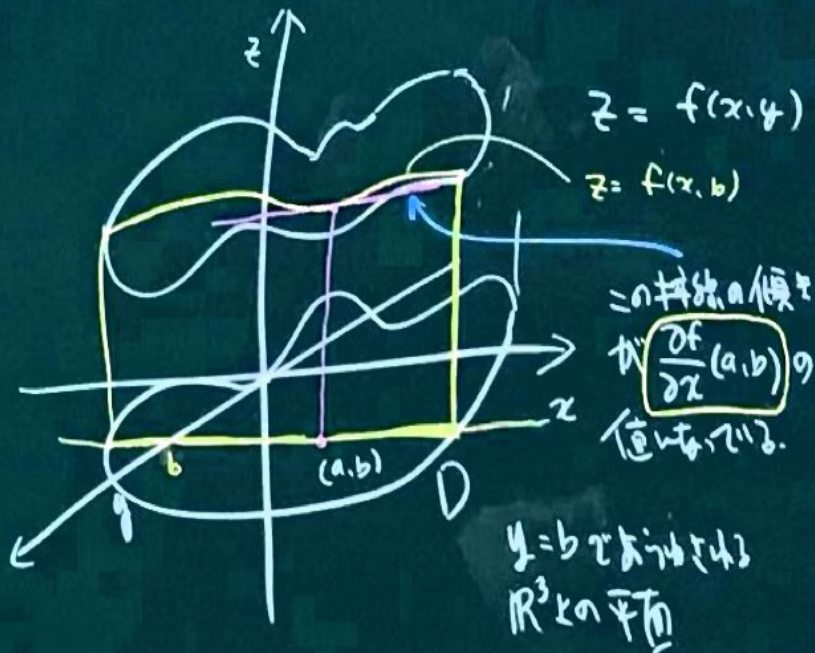
$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b)$ とおき、 f の a での
 y -偏微分係数とよび、 f の y -偏導関数
 $\frac{\partial f}{\partial y}, f_y$ も x -偏導関数と同様に定義する。

例 $f(x, y) = x^2 e^{xy}$ $(f_y)' = f_y + f_x'$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) e^{xy} + x^2 \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})$$

$$= 2x \cdot e^{xy} + x^2 y e^{xy} = (2 + xy) x e^{xy}$$

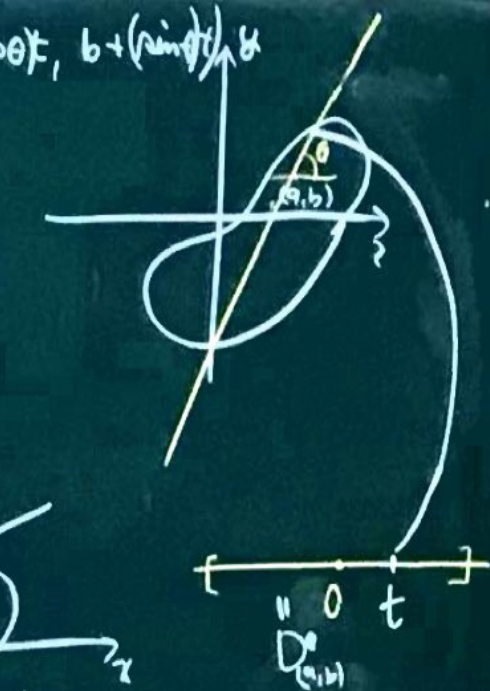
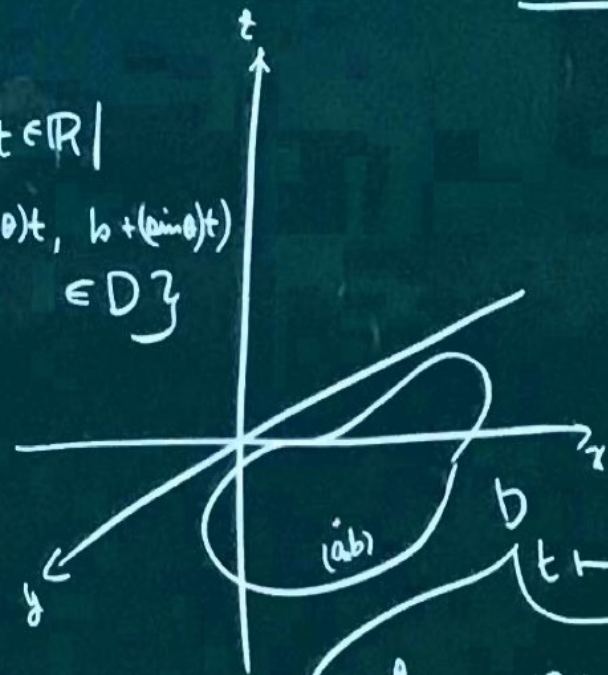
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 e^{xy}$$



方向微分

$$(a + (\cos \theta)t, b + (\sin \theta)t)$$

$$D_{(a,b)}^0 = \{t \in \mathbb{R} \mid (a + (\cos \theta)t, b + (\sin \theta)t) \in D\}$$



$D_{(a,b)}^0 \rightarrow \mathbb{R}$
 の 0 での微分係数は f の (a, b) における方向微分と一致

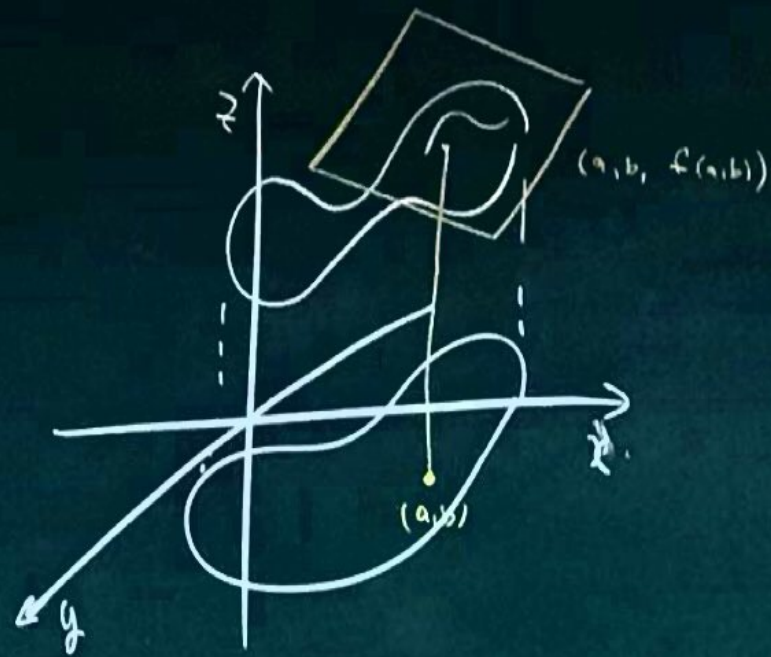
f の (a, b) での x -偏微分係数は (a, b) での方向 $\theta=0$
 の f の方向微分と一致し f の (a, b) での y -偏
 微分係数は (a, b) での方向 $\theta=\frac{\pi}{2}$ の f の方向微分と
 一致する。

全微分可能

接平面 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が f に "おなまお" 関数のとき
 点 $(a, b) \in D$ に対し f のグラフ上の点 $(a, b, f(a, b))$
 で "接平面" が与えられる。このとき

$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ と $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ が x と y の接平面の

x 軸方向, y 軸方向の傾き係数になる。



したがってこの接平面の方程式は

$$z = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}_{\text{normal}} x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) y + c$$

という形になる(これは必ずしも

$\frac{\partial f}{\partial x}$ "normal over $\text{level } x$ " $(a, b, f(a, b))$ の平面に a
の点で触れるわけだから、

$$f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) a + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) b + c$$

より、

$$c = f(a, b) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) a + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) b \right)$$

である。あるいはこれを整理して、

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) (y - b) + f(a, b)$$

が接平面の方程式である。

接平面が与えられると、 ∇f 方向の法線は、

$\underbrace{f_a}_{(a,b) \text{ での}} \theta$ 方向への方向微分と一致してはならない。

定理 2.1 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が D 上 x -偏微分

可能かつ y -偏微分可能で $\frac{\partial f}{\partial x}: D \rightarrow \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial y}: D \rightarrow \mathbb{R}$ が両方とも連続なとき f は

上の D 上で "全微分可能" 関数となり, 特に D 上の $(a, b) \in D$

↑
全微分可能

で接平面を導くことができる.

例 $f(x, y) = x^2 e^{xy}$ $(fg)' = f'g + fg'$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) e^{xy} + x^2 \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})$$

$$= 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} = (2 + xy) x e^{xy}$$

$f_x : D \rightarrow \mathbb{R}$ の x -偏導関数と y -偏導関数を

$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ とし、

また、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ などには $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ などと書く。

f_{yy} , f_{yx} など $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ などと同じ様

例 $f(x, y) = x^2 e^{xy}$ の場合

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy}$$

など...