補講（演習） 7月11日（木）

15:10〜

偏微分 $D \subseteq \mathbb{R}^2$

$f : D \to \mathbb{R}$ に対して f の x-, y-

偏微分を f_x $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, f_y $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

などと書く。（x-偏微分の $(a,b) \in D$ での値を

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$

$f_x(a,b)$　$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$　$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=a,\,y=b}$

$\frac{\partial}{\partial x} f(a,b)$　$(x,y)=(a,b)$

などと書く。y-偏微分についても同様

Dとの関係!!

f_x, f_y の x-偏微分を

f_{xx} $\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$

f_{yx} $\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right.$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

と書く。

例 (例 4.12) $f(x,y) = x^2 e^{xy}$ とする

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^3 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 2e^{xy} + 2xy e^{xy} + 2xy e^{xy} + x^2 y^2 e^{xy}$$

$$= \cdots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = 2x^2 e^{xy} + x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy}$$

$$= \underline{3x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \underline{3x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy}}$$

$\vdots$

例 (例 4.13) 教科書

$$g(x,y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,y)=(0,0)} =$$

$$g_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{0}{g(x+h,0)} - \overset{0}{g(0,0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{\psi'\varphi - \psi\varphi'}{\varphi^2}}$$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$g_x(x,y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x \cdot 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$g_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g_x(0,h) - g_x(0,0)}{h}$$

$= 0$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g_x(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^3}{\underbrace{h^2\, h}_{=-1}} = -1$$

同様

$$g_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g_y(h,0) - g_y(0,0)}{h} = \cdots = 1$$

定理3.1により g_{xy} と g_{yx} の少なくとも1つは $(0,0)$ で連続でないことがわかる。

定理3.2により、g_{xy} も g_{yx} も $(0,0)$ で連続でない。

定理 3.1 (教科書定理4.1)

この定理はまだ最良 optimal でない！

領域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ での $f: D \to \mathbb{R}$ について、f_x f_y f_{xy} f_{yx} を持ち、f_{xy} と f_{yx} が D で連続なとき、

$f_{xy} = f_{yx}$ が (Dで) 成り立つ

つまりすべての $(a,b) \in D$ について、$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ となる。

定理3.2 (数、4.2, Schwantz)

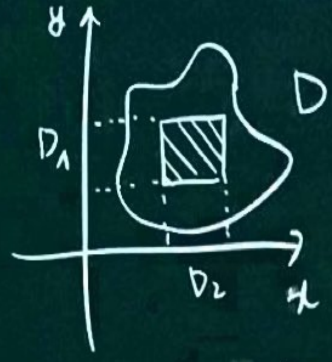
領域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ の $f: D \to \mathbb{R}$ について、$\overbrace{D\text{で}}$ f_x f_y f_{xy} が存在して f_{xy} が D で連続なら f_{yx} も存在して、$f_{xy} = f_{yx}$ が (Dで) 成り立つ。

定理 3.3 (合成関数の微分法)

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ 領域　D_1, $D_2 \subseteq \mathbb{R}$ 区間

$D_1 \times D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in D_1,\ y \in D_2\} \subseteq D$

とする.



$f : D \to \mathbb{R}$ は x-, y-偏微分可能で f_x f_y は D で連続とする.

ある区間 D_0 と関数 $\varphi : D_0 \to D_1$ $\psi : D_0 \to D_2$ について φ と ψ も D_0 上で微分可能とする.

で φ' は連続

(か ψ' の1つ)

このとき,

$f(\varphi, \psi) : D \to \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto f(\varphi(t), \psi(t))$

も D 上で微分可能で,

$$\frac{d}{dt} f(\varphi, \psi)\Big|_{t=u} = \varphi'(u) f_x(\varphi(u), \psi(u)) + \psi'(u) f_y(\varphi(u), \psi(u))$$

が成り立つ.

この条件は実は落せるが，これを落した主張の証明は，ここでのものよりずっと複雑になる.

http://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-elementary.pdf

を参照.

φ' が連続の場合を示す. ψ' が連続の場合も同様.

証明

もしこれが定義されていると…

$$\frac{d}{dt} f(\varphi,\psi)\Big|_{t=u} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\varphi(u+h),\psi(u+h)) - f(\varphi(u),\psi(u))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(u+h),\psi(u+h)) - f(\varphi(u+h),\psi(u)) + f(\varphi(u+h),\psi(u)) - f(\varphi(u),\psi(u))}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(u+h),\psi(u+h)) - f(\varphi(u+h),\psi(u))}{h}}_{(*)} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(u+h),\psi(u)) - f(\varphi(u),\psi(u))}{h}}_{(**)}$$

$$(**) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t),\psi(u))\Big|_{t=u}$$

$$= \varphi'(t)\, f_x(\varphi(t),\psi(u))\Big|_{t=u}$$

1変数関数の合成関数の微分法!

$$= \varphi'(u)\, f_x(\varphi(u),\psi(u))$$

(*) は, f_x と φ' が D で連続であることを使う

平均値定理

$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ が微分可能ならば

$g(b) = g(a) + g'(\xi)(b-a)$ となる $a<\xi<b$ がとれる

を使うと

$$f(\varphi(u+h), \psi(u+h)) = f(\varphi(u), \psi(u+h)) + \overbrace{\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(u+h))\Big|_{t=u+\theta_1(u,h)h}}^{\varphi'(u+\theta_1(u,h)h) f_x(\varphi(u+\theta_1(u,h)h),\, \psi(u+h))} h$$

ただし $0<\theta_1(u,h)<1$

$$f(\varphi(u+h), \psi(u)) = f(\varphi(u), \psi(u)) + \underbrace{\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(u))\Big|_{t=u+\theta_2(u,h)h}}_{\varphi'(u+\theta_2(u,h)h) f_x(\varphi(u+\theta_2(u,h)h),\, \psi(u))} h$$

ただし $0<\theta_2(u,h)<1$

② この2式を(*)に代入すると,

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(u),\psi(u+h))-f(\varphi(u),\psi(u))}{h}}_{\substack{\text{(**)のときと同様に}\\ = \\ \psi'(u)\,f_y(\varphi(u),\psi(u))}}+\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\varphi'(u+\theta_1(u,h)h)\,f_x(\varphi(u+\theta_1(u,h)h),\psi(u+h))\cancel{h}-\varphi'(u+\theta_2(u,h)h)\,f_x(\varphi(u+\theta_2(u,h)h),\psi(u))\cancel{h}}{\cancel{h}}}_{\substack{\varphi'\text{ も } f_x \text{ も連続だから}\\ \downarrow \\ 0}}$$

$\underline{\underline{}} + \underline{\underline{}}$ は求める式になっている

∎