

定理 3.3

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^2$ f は D で x - y -偏微分が連続で

f_x, f_y は連続 $\varphi: D_0 \rightarrow D_1$ $\psi: D_0 \rightarrow D_2$

$D_0, D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$
(区間)

φ, ψ は C_1 -級 $\alpha, \beta: f(\varphi(t), \psi(t)): D_0 \rightarrow \mathbb{R}$
は微分可能で

$$\frac{d}{dt} f(\varphi, \psi) \Big|_{t=u} = \varphi'(u) f_x(\varphi(u), \psi(u)) + \psi'(u) f_y(\varphi(u), \psi(u))$$

(証明)

定理 4.1 (D_1, D_2, D_3)
 $f \in C^1$

定理 3.3 のように

$E \subseteq \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}$, $\varphi: E \rightarrow D_1$ $\psi: E \rightarrow D_2$

$\alpha, \beta: \varphi: E \rightarrow D_1; (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$

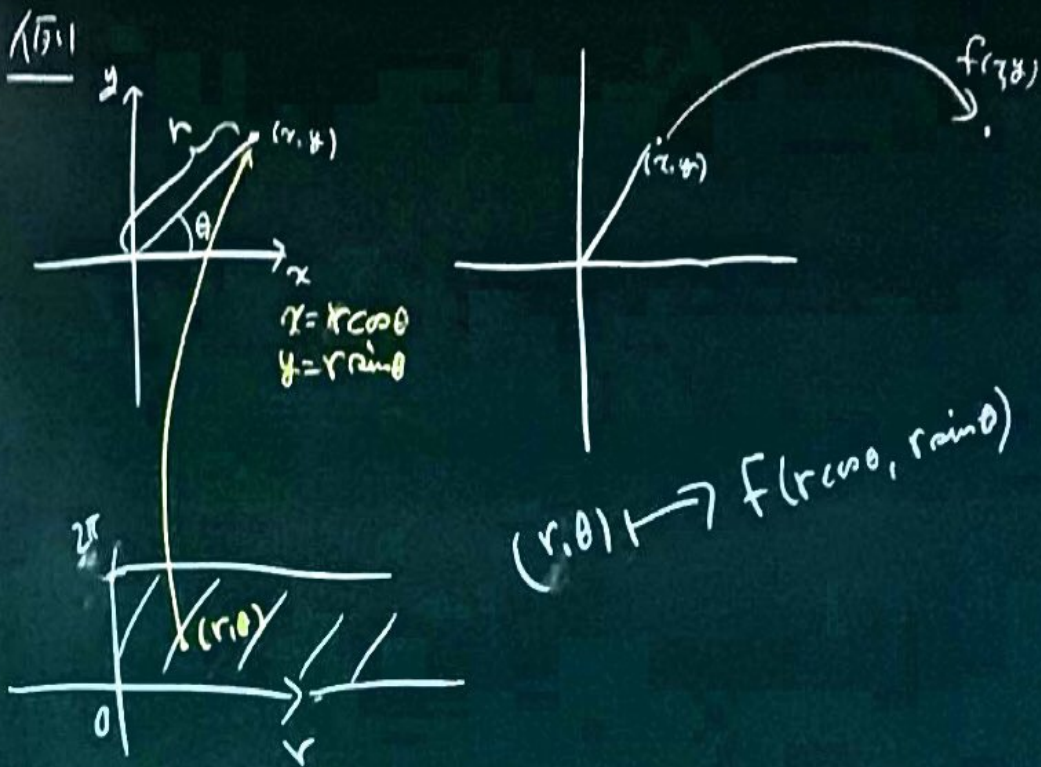
$\psi: E \rightarrow D_2; (u, v) \mapsto \psi(u, v)$ とする。

つまり $f(\varphi(u, v), \psi(u, v)): E \rightarrow \mathbb{R}$ は
 u, v -偏微分が連続で (φ, ψ) は連続で可微分

$$\frac{\partial}{\partial u} f(\varphi, \psi) \Big|_{u=a, v=b} = \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, v) f_x(\varphi, \psi) \Big|_{u=a, v=b} + \frac{\partial}{\partial u} \psi(u, v) f_y(\varphi, \psi) \Big|_{u=a, v=b}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\varphi, \psi) \Big|_{u=a, v=b} = \frac{\partial}{\partial v} \varphi(u, v) f_x(\varphi, \psi) \Big|_{u=a, v=b} + \frac{\partial}{\partial v} \psi(u, v) f_y(\varphi, \psi) \Big|_{u=a, v=b}$$

证明定理 3.3 的 2.1



图

f 对 x, y 偏微分定理? f_x, f_y 对 r, θ 偏微分
定理 4.1 的

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$= \cos \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

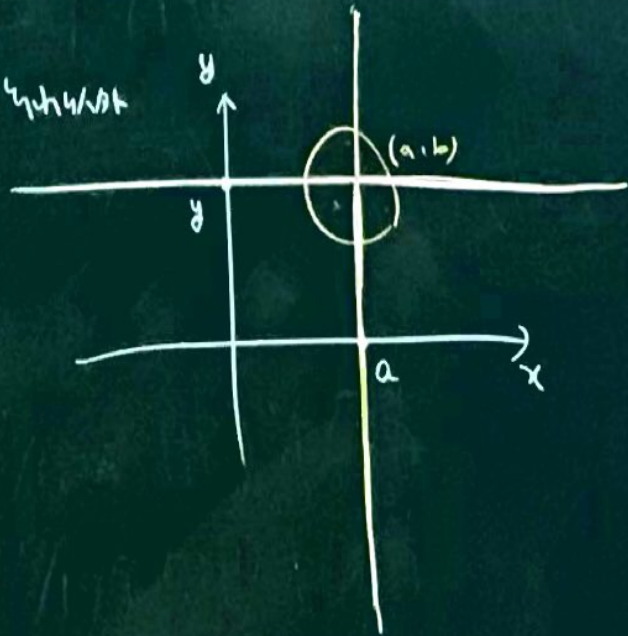
$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$= -r \sin \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

证 2.

例 $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x=a \text{ または } y=b \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



すると,

$$f_x(a, b) = 0$$

$$f_y(a, b) = 0$$

だが, f は (a, b) で連続ではない

[(a, b) の任意の近傍で $f(x, y) = 0$ の点と $f(x, y) = 1$ の点が存在する!]

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 関数 $(a, b) \in D$?

$\mathbb{R}^2$ 全微分可能とは, ある $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対し,

(α, β は定数) $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ に対し
(原点からの距離が)

$$\epsilon_{f, (a, b)}(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

と

⑦

⑦

$$(**) \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \Sigma_{f(a,b)}(h,k) = 0$$

と仮定すると仮定.

(これは " $f(a,b)$ が a, b の関数の点 $(a+h, b+k)$ について

$$f(a+h, b+k) \approx \alpha h + \beta k + f(a,b)$$

という近似が成り立つ" という主張を証明する必要がある

(**)が成り立つ
ほど

補題 4.2 f が (a,b) で全微分可能ならば

α, β を定数とするにせよ,

$$f_x(a,b) = \alpha \quad f_y(a,b) = \beta \quad \text{と成り立つ.}$$

証明 (*) の両辺に $\sqrt{h^2+k^2}$ を割ると、整理すると、

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \alpha h + \beta k + \Sigma_{f(a,b)}(h,k) \sqrt{h^2+k^2}$$

$h=0$ とすると h は消滅する

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h} = \alpha + \underbrace{\frac{\Sigma_{f(a,b)}(h,0)|h|}{h}}_{\rightarrow 0}$$

よって $f_x(a,b) = \alpha$ が成り立つ同様に $f_y(a,b) = \beta$

□

定理 4.3 $f(x, y)$ が点 $(a, b) \in D$ 上で

全微分可能なとき f は (a, b) で連続である。

証明 (***) として、十分に小さな $\delta_0 > 0$ をとると、

すべての $(h, k) \in U_{\delta_0}((0, 0))$ について
 $(\sqrt{h^2 + k^2} < \delta_0$ とする h, k について)

$$|\varepsilon_{f, (a, b)}(h, k)| < 1 \text{ と仮定してよい。}$$

$(\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して})$

$$\delta = \min \left\{ \delta_0, \frac{\varepsilon}{2}, \text{ (十分小さな値)} \right\}$$

よって、 $(x, y) \in U_\delta((a, b))$ ならば、

$$f(x, y) - f(a, b) = \alpha(x-a) + \beta(y-b)$$

$$|\alpha(x-a) + \beta(y-b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|\alpha(x-a) + \beta(y-b)| < \varepsilon$$

$$\sqrt{(\alpha(x-a))^2 + (\beta(y-b))^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$+ \varepsilon_{f, (a, b)}(x-a, y-b) \sqrt{\frac{(\alpha(x-a))^2 + (\beta(y-b))^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \downarrow \delta$$

$$\sqrt{\frac{(\alpha(x-a))^2 + (\beta(y-b))^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

定理 4.4 (教科書定理 4.5)

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ について, f_x, f_y が

$\mathbb{R}^2$ (a, b) の近傍で定義されて

しかも連続のとおり, f は (a, b) で全微分可能である.

補題 4.5 定理 3.3 の等式が成り立つときは,

点 (a, b) での θ 方向の方向微分が

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + (\cos \theta)h, b + (\sin \theta)h) - f(a, b)}{h} = \cos \theta f_x(a, b) + \sin \theta f_y(a, b)$$

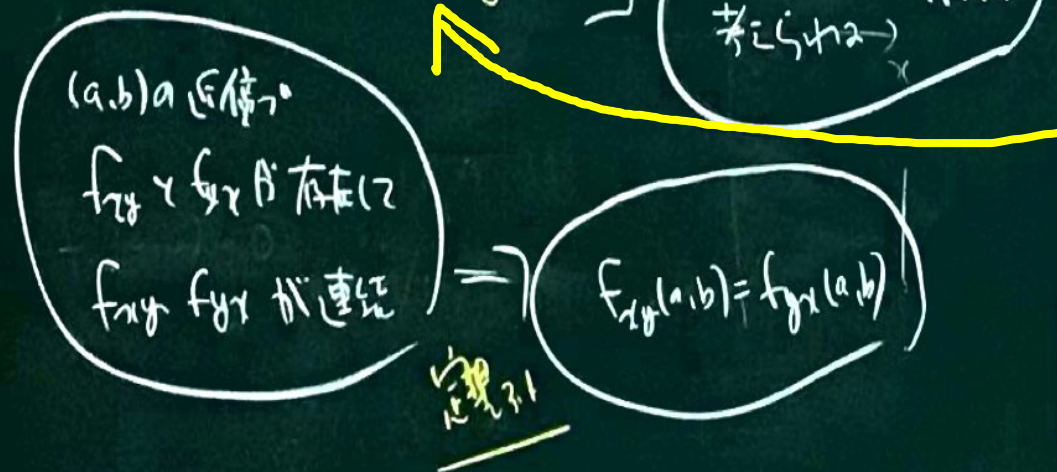
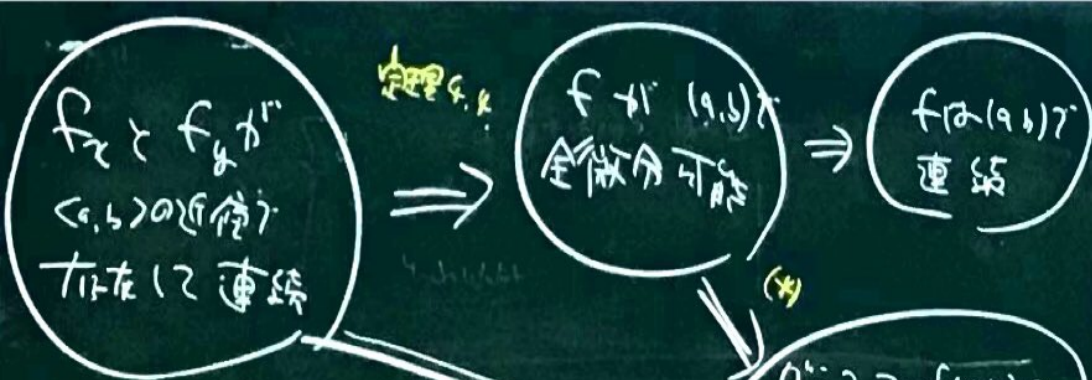
と計算できる. これは, π (接平面を意味する).

$$(†) \quad z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

があらわされる平面の θ 方向への傾きと一致する.

このとき, 点 (a, b) をグラフ $z = f(x, y)$ の接平面が

(†) で与えられるということになる (証明).



一つ前の黒板の定理 4.5 を参照.