補足

定理3.1 $f: D \to \mathbb{R}$ について、（$D \subset \mathbb{R}^2$）

f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} が D 上で定義されていて連続なとき、

$$f_{xy} = f_{yx}$$

↑ D 上の関数として等しい

定理3.2（定理3.1の改良）…

定理S.1（定理3.1の系）

$f: D \to \mathbb{R}$ が n 回偏微分可能で（$D \subset \mathbb{R}^2$）

すべての偏微分の結果が連続なら、

z_i, z_i' を x または y とするとき、$z_1 \dots z_m$ と $z_1' \dots z_m'$ が同数の x と y を含むときには、

$$f_{z_1 \dots z_m} = f_{z_1' \dots z_m'}$$

となる

たとえば $f_{xyx} = f_{xxy} = f_{yxx}$ である。

たとえば $f_{xyx} = f_{yxx}$

定理3.1により

$f_{xy} = f_{yx}$ から

$f_x = f_x$ から 定理3.1により

$$(f_x)_{xy} = (f_x)_{yx}$$

$$\begin{array}{ccc} \shortparallel & & \shortparallel \\ f_{xxy} & & f_{xyx} \end{array}$$

合成関数の微分法

$f : D \to \mathbb{R}$ $\quad$ I_1 I_2 を区間とし（区間 $\subseteq \mathbb{R}$）

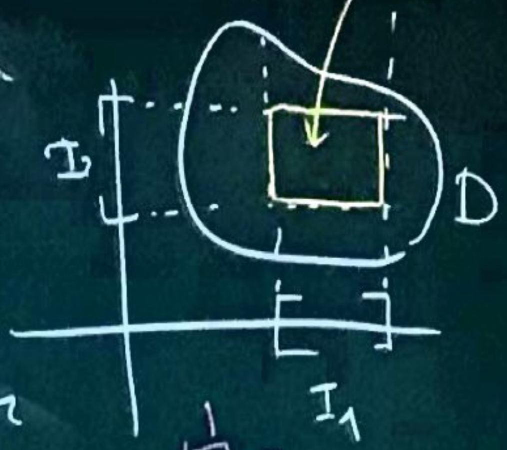
$D \subseteq \mathbb{R}$

$I_1 \times I_2 \subseteq D$ で

$\varphi : I \to I_1$ $\quad$ $I \subseteq \mathbb{R}$

$\psi : I \to I_2$ ですべて $\quad$ $I \subseteq \mathbb{R}$

C_1-級とするとき



定理3.3

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) = \varphi'(t) f_x(\varphi(t), \psi(t)) + \psi'(t) f_y(\varphi(t), \psi(t))$$

特に $\varphi(t) = a + ht$ $\psi(t) = b + kt$ とすると
$\varphi'(t) = h$ $\psi'(t) = k$ だから,

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) = h f_x(\varphi(t), \psi(t)) + k f_y(\varphi(t), \psi(t))$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \underbrace{f(\varphi(t), \psi(t))} = h\left(h f_{xx}(\varphi(t), \psi(t)) + k f_{xy}(\varphi(t), \psi(t))\right) + k\left(h f_{yx}(\varphi(t), \psi(t)) + k f_{yy}(\varphi(t), \psi(t))\right)$$

$$= h^2 f_{xx}(\varphi(t), \psi(t)) + 2hk f_{xy}(\varphi(t), \psi(t)) + k^2 f_{yy}(\varphi(t), \psi(t))$$

c.f. $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$$\frac{d^3}{dt^3} f(\varphi(t), \psi(t))$$

$$= h^2\left(h f_{xxx}(\varphi(t), \psi(t)) + k f_{xxy}(\varphi(t), \psi(t))\right)$$

$$+ 2kh\left(h f_{xyx}(\varphi(t), \psi(t)) + k f_{xyy}(\varphi(t), \psi(t))\right)$$

$$+ k^2\left(h f_{yyx}(\varphi(t), \psi(t)) + k f_{yyy}(\varphi(t), \psi(t))\right)$$

$$= h^3 f_{xxx}(\varphi(t), \psi(t)) + 3h^2k f_{xxy}(\varphi(t), \psi(t))$$

$$+ 3hk^2 f_{xyy}(\varphi(t), \psi(t)) + k^3 f_{yyy}(\varphi(t), \psi(t))$$

c.f. $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

補題 5.2

$f : D \to \mathbb{R}$ が C_n-級のとき, ($D \subset \mathbb{R}^2$)

$\varphi(t) = a + ht \quad \psi(t) = b + kt$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n} f(\varphi(t), \psi(t)) &= h^n f_{\underbrace{x\cdots x}_{n}}(a+ht,\ b+kt) \\
&+ {}_nC_1\, h^{n-1} k\, f_{\underbrace{x\cdots x}_{n-1} y}(a+ht,\ b+kt) \\
&+ {}_nC_2\, h^{n-2} k^2 f_{\underbrace{x\cdots x}_{n-2} yy}(a+ht,\ b+kt) \\
&\ \ \vdots \\
&+ {}_nC_{n-1}\, h k^{n-1} f_{x \underbrace{y\cdots y}_{n-1}}(a+ht,\ b+kt) \\
&+ k^n f_{\underbrace{y\cdots y}_{n}}(a+ht,\ b+kt)
\end{aligned}
$$

補習 (Taylor の定理)

$z : I \to \mathbb{R}$ が ($I \subset \mathbb{R}$)

C_n-級のとき　$a \in I$　$x \in I$ のとき

$$
z(x) = z(a) + \frac{z'(a)}{\underbrace{1!}_{=1}}(x-a)^1 + \frac{z''(a)}{\underbrace{2!}_{=2}}(x-a)^2 + \cdots + \frac{z^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{z^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n
$$

となるような a と x の間にある ξ がとれる.

特に $a=0$ とおくと (Maclaurin の定理)

$$
z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!}x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{z^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{z^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n
$$

となるような $0 < \theta < 1$ がある

$0 \quad \theta x \quad x$　または　$x \quad \theta x \quad 0$

ここで $f: D \to \mathbb{R}$ として, $(a, b) \in D$

$D \subset \mathbb{R}^2$

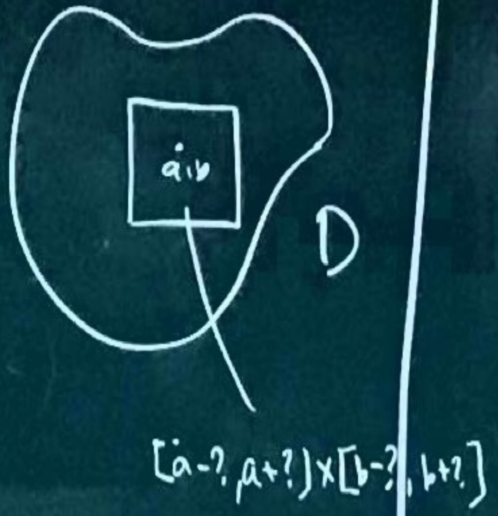
0を含みZが定義できる

$Z(t) = f(a+ht, b+kt)$ をある区間 I で考える.

f が C^n-級のとき,

Z も C^n-級で,

Maclaurinの定理より,

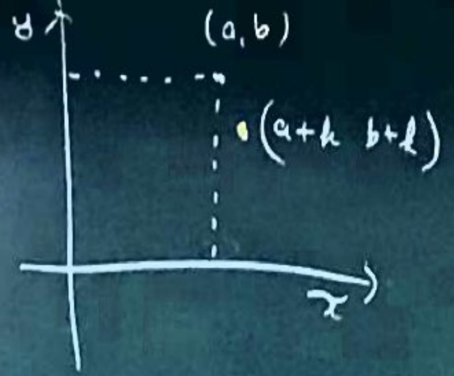


$$Z(1) = Z(0) + \frac{Z'(0)}{1!} + \frac{Z''(0)}{2!} + \cdots + \frac{Z^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{Z^{(n)}(\theta)}{n!}$$

$Z(1) = f(a+h, b+k)$

となる $0 < \theta < 1$ がとれる.

$$= f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)\right)$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(h^3 f_{xxx}(a,b) + 3h^2k f_{xxy}(a,b) + 3hk^2 f_{xyy}(a,b) + k^3 f_{yyy}(a,b)\right)$$

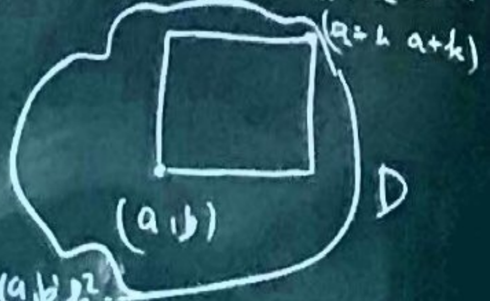


定理 5.3 (2変数関数の Taylor の定理)

$f : D \to \mathbb{R}$ が D で C^n-級のとき, $(a, b) \in D$

$D \subset \mathbb{R}^2$

とし z を前のように定義すると, $(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) \in D$ がすべての $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$ に対して成り立つような h と k について



$$
\begin{aligned}
f(a+h, b+k) &= f(a,b) \\
&+ f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
&+ \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)h^2 + f_{xy}(a,b)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)k^2 \\
&+ \frac{1}{6} f_{xxx}(a,b)h^3 + \frac{1}{2} f_{xxy}(a,b)h^2k + \frac{1}{2} f_{xyy}(a,b)hk^2 + \frac{1}{6} f_{yyy}(a,b)k^3 + \\
&\cdots + \frac{z^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{z^{(n)}(\theta)}{n!} \quad 0 \leq \theta \leq 1
\end{aligned}
$$

特に $a=0$ $b=0$ の場合には、h と k を x, y と書きかえると、

Maclaurin の定理

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = f(0,0) &+ f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\
&+ \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2 \\
&+ \frac{1}{6}f_{xxx}(0,0)x^3 + \frac{1}{2}f_{xxy}(0,0)x^2y + \frac{1}{2}f_{xyy}(0,0)xy^2 + \frac{1}{6}f_{yyy}(0,0)y^3 \\
&+ \cdots + \bigcirc + \bigcirc
\end{aligned}
$$

f が n 次の多項式関数のときには $n+1$ 次で Maclaurin の定理を用いると f 自身が得られる

例 $f(x,y) = x^2 + 2xy$ とすると

$f_x(x,y) = 2x + 2y$

$f_y(x,y) = 2x$ $\quad f_{yyy}(x,y) = 0$

$f_{xx}(x,y) = 2$

$f_{xy}(x,y) = 2$

$f_{yy}(x,y) = 0$

$f_{xxx}(x,y) = 0$

$f_{xxy}(x,y) = 0$

$f_{xyy}(x,y) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 0 + \underbrace{f_x(0,0)}_{=0}x + \underbrace{f_y(0,0)}_{=0}y \\
&\quad \underbrace{+ \frac{1}{2}\underbrace{f_{xx}(0,0)}_{=2}x^2 + \underbrace{f_{xy}(0,0)}_{=2}xy + \frac{1}{2}\underbrace{f_{yy}(0,0)}_{=0}y^2}_{x^2+2xy} \\
&\quad + 0
\end{aligned}
$$

演習

$f(x,y) = e^{x+y}$ としたときの

Maclaurin 定理での $f(x,y)$ 展開式を求めよ