

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$\mathbb{R}^2$

f が $\langle a, b \rangle \in D$ の 最大値をとる
最小値

$\Leftrightarrow$ ある $\langle c, d \rangle \in D$ に対して

$f(a, b) \geq f(c, d)$ かつ

$\leq$

f が $\langle a, b \rangle$ の 極大? 極小?

極小

広義に極大

広義に極小

$\Leftrightarrow$ ある $(\forall \epsilon > 0)$ に対して,

すべての $\langle x, y \rangle \in U_\epsilon(a, b) \cap D$ に対して

$f(x, y) < f(a, b)$ となること,

$\langle x, y \rangle \neq \langle a, b \rangle$

$>$

$\leq$

$\geq$

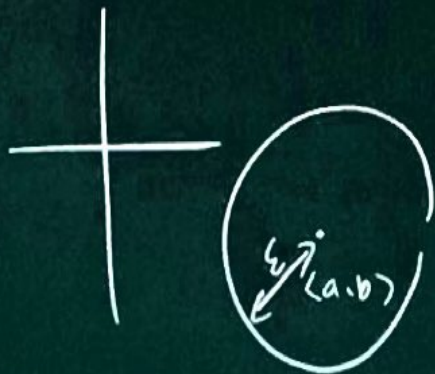
f が $\langle a, b \rangle$ の 極大 極小 のとき,

f が $\langle a, b \rangle$ の 極値をとる

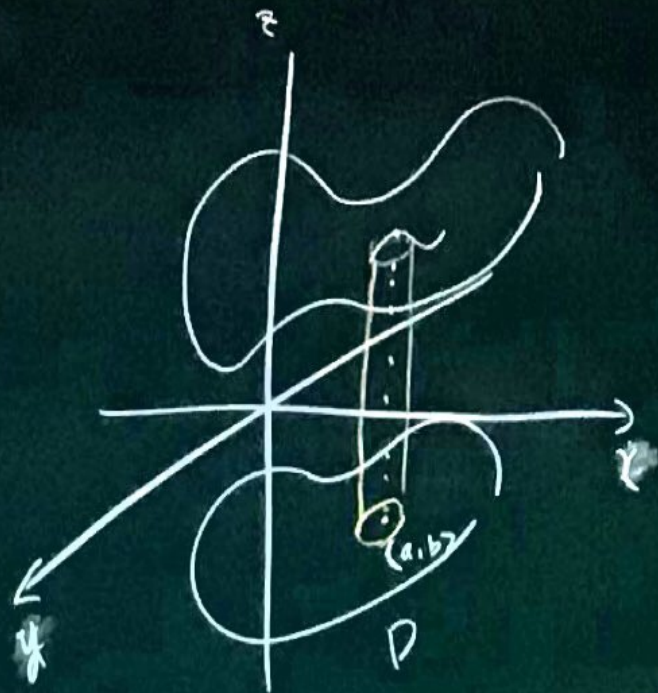
という

$$\bigcup_{\varepsilon} (a, b) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{d((a, b), (x, y))}_{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} < \varepsilon \}$$

↑
 (a, b) の ε
 近傍
 といふ



(a, b) が $\bigcup_{\varepsilon} (a, b)$ の点 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ に対し
 $(a, b) \in \bigcup_{\varepsilon} (a, b) \subseteq D$
 といふこと



注意 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が $\langle a, b \rangle$ の最大値をとる
最小値

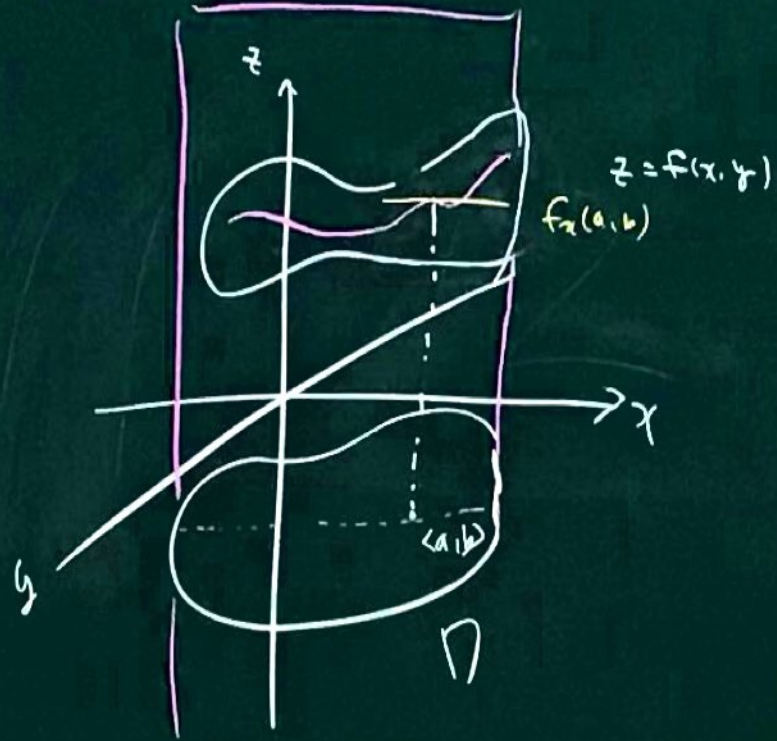
ならば f は $\langle a, b \rangle$ の広義に極大 である。
広義に極小

定理 6.1 (教科書 4.9)

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が 定義域 D の内点 $\langle a, b \rangle$ で

$\sqrt{\mathbb{R}^2}$
微分可能 で $\langle a, b \rangle$ の極値をとるときは、

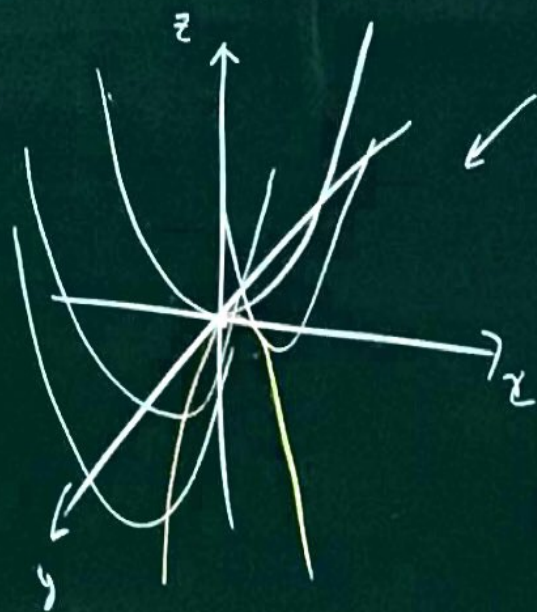
$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$



例 $f(x, y) = x^2 - y^2$ とする

$$f_x(x, y) = 2x \quad f_y(x, y) = -2y$$

したがって, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ となる



$f(x, y)$ は $(0, 0)$ で
極値をとらない

鞍点
あんな

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が C_2 -級関数とする。

$$\det H(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y)$$

$$\det H_f(x, y) = (f_{xy}(x, y))^2$$

(ヘッセ行列の行列式)

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

定理 6.2 (教科書定理 4.10) f が C_3 -級で (a, b) が

D の内点で, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ かつ (a, b) が

(1) $\det H(a, b) > 0$ のとき (a) $f_{xx}(a, b) > 0$ なら f は (a, b) で極値をとる

(b) $f_{xx}(a, b) < 0$ なら f は (a, b) で極値をとる。

(2) $\det H(a, b) < 0$ なら f は (a, b) で極値をとらない

(3) $\det H(a, b) = 0$ のときは不定

応用例

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 3y^2 - 6y + 1$$

の極値をしらべる.

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$f_y(x, y) = 6y - 6$$

したがって

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ または } x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

したがって定理 6.1 (F)より、 f が極値をとる可能な点は

$(0, 1)$, $(-2, 1)$ である.

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 6 \quad \left| \quad \det H_f(x, y) = 6(6x + 6) \right.$$

$$f_{yy}(x, y) = 6$$

$$f_{xy}(x, y) = 0$$

$$\det H_f(0, 1) = 36$$

$$\det H_f(-2, 1) = -36$$

したがって定理 6.2 (F)より $(0, 1)$ で極値をとる

$f_{xx}(0, 1) = 6 > 0$ により f は $(0, 1)$ で極小値をとる

また $(-2, 1)$ では極値をとらない.

定理 6.2 の証明の又々 4 f が C_3 級? ならば

前回の 2 変数の Taylor の定理を思い出すと、

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{1!} (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k) + \frac{1}{2!} (f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2)$$

+ R ← h, k の 3 次
 $\hookrightarrow$ $(h, k) \rightarrow 0$ なら $\frac{1}{3!} \| (h, k) \|^3$ 程度

特に定理 7 の $\langle a, b \rangle$ は $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ なの

$$f(a+h, b+k) \simeq f(a, b) + \frac{1}{2!} \left(\underbrace{f_{xx}(a, b)}_{\alpha} h^2 + 2 \underbrace{f_{xy}(a, b)}_{\beta} hk + \underbrace{f_{yy}(a, b)}_{\gamma} k^2 \right)$$

$\alpha \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\alpha \neq 0} \frac{1}{2} (\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2) \quad \text{det } H(c, b) \\ &= \frac{1}{2} \alpha \left(h + \frac{\beta}{\alpha} k \right)^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{2\alpha} k^2 \end{aligned}$$

+ - は同じ

$\det H(a,b) > 0$ のときは,

$(h,k) \neq (0,0)$ のときは $\underline{\hspace{2cm}}$ の

$\pm$ は一定 つまり $\alpha > 0$ ($f_{xx}(a,b) > 0$)

のときは $\underline{\hspace{2cm}}$ は常に $\nabla f = 0$ (したがって

$$f(a,b) \leq f(a+h, b+k) \pm R \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{増加} + \text{減少} \\ \text{減少} + \text{増加} \end{matrix} \text{の値} \neq 0$$

が成り立つ $\Rightarrow f$ は (a,b) で極小

$\alpha < 0$ のときも同様に f は (a,b) で極大がわかる

$\det H(a,b) < 0$ のときは (a,b) の近傍でも

$\underline{\hspace{2cm}}$ が $\nabla f = 0$ となることはない

$\Rightarrow f$ は (a,b) で極値をとらない。

定理 6.3 (Lagrange の未定数法)

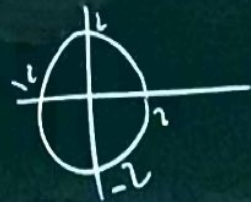
(1736-1813)

関数 $f : D \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^2} \mathbb{R}$ } C_1 -級
 $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$

ただし φ は $\varphi(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) の

$\varphi_x(x,y) \neq 0$ $\varphi_y(x,y) \neq 0$ とする
 $\leftarrow$ 正しくは

$\left[\text{すなわち, } \{(x,y) \in D \mid \varphi(x,y) = 0\} \text{ は平面上の} \right.$
 $\left. \text{曲線と見做す (例 } \{(x,y) \in D \mid x^2 + y^2 - 2 = 0\}) \right]$

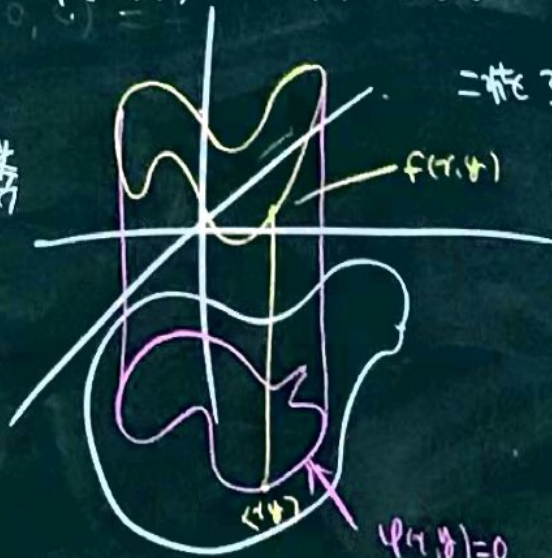


このとき, $\varphi(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) の f の値が 広義の極値 をとる点 (a, b) は

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi(x, y) \text{ としたとき}$$

↑
Lagrangean

↑
新しい変数



二変数関数の

図解とみた

$$\frac{\partial L}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial L}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(a, b) = 0$$

を満たす。

多くの応用では, 以下の事実あわせて用いる:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{連続な } \{(x, y) \in D \mid \varphi(x, y) = 0\} \text{ が有界な } \\ \varphi: D \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\}$

つまりある $\varepsilon > 0$ について $S \subseteq U_\varepsilon(0, 0)$ と仮定する

S 上連続関数 f の最大値最小値をとる。