

線形代数入門 1

Linear Algebra

担当: 福田 昭
Fuchino Sakae

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

講義のweb page <http://fuchino.ddo.jp/kobe/>

数学学修支援室 月~木 昼/休
C棟 C410 4A22A115 -

行列とベクトル matrix

行列: 数学的対象(数など)を四角く
ならべた表のこと
column

() でくくる書きもある。

例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \\ \frac{1}{2} & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1行
2行
3行
4行
5行

1列
2列
3列
4列

5x4 行列

1行列は+文字のアルファベット A, B, ...
などであらわす

一般の行列を表わすと、

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

↑
行列 A の i 行 j 列
成分をあらわす

(2,3)-成分

以下では成分がすべて 0 であるような行列を扱う。

成分がすべて 0 であるような行列を 0 行列

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は 4×4 の 0 行列

0 行列は太字の 0 であらわす

サイズを指定するときは $O_{m,n}$, $O_{2,3}$ などと書く。

$n \times n$ 行列 A が $n=n$ とあるとき A を正方行列という
正方行列で 左から右下への対角線上的成分が
すべて 0 になっているものを 対角行列 とする

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

はすべて 3×3 の対角行列

正方形行列 $A = [a_{ij}]$ が対角行列とは
 (対角 対角 $a_{ii} = 0$ とは) こと。

$$(A = [a_{ij}])$$

$n \times n$ 正方形行列の単位行列

とは、

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

単位行列

単位行列は E_n だけ E_{unit} (単位)

表す 単位行列が $n \times n$ (3×3 など) であること
 強調するときには E_n (E_3) などと書く

行列のうち 行の数が 1 のもの

$$[a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]$$

$n=2$ の
 n 行ベクトル

を 行ベクトル とよぶ 行ベクトルは 1 重の文字

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

ベクトルは小文字の太文字 $a, b, c, \dots$ であらわす $\rightarrow$ 文字のときは $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ などであらわすこともある。

行列のうち 列の数が 1 のものを

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

を $\overline{b}$ -ベクトルと表す

m -元
 m -次元 $\overline{b}$ -ベクトル

$\overline{b}$ ベクトル $a, b, c, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 等の
あらわす。

行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ の行と列を i, j として

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad i = \text{行}, j = \text{列}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$b_{ij} = a_{ji}$$

転置行列

を A の 転置行列 とし ${}^t A$ と表す。

$\overline{b}$
transposed matrix

a 行 m -次元 $\overline{a}$ ベクトル a は m -次元 $\overline{a}$ ベクトル

$${}^t [1234] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad {}^t ({}^t A) = A$$

$\overline{b}$
行列の転置

A, B $m \times n$ 行列として $A = [a_{ij}]$ $B = [b_{ij}]$ と表す

$A+B$ は $[c_{ij}]$ とする $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ とする。

$$\text{例 } \begin{bmatrix} 123 \\ 234 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -101 \\ 012 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 024 \\ 246 \end{bmatrix}$$

A は $m \times n$ 行列とすると

$$A + O_{m \times n} = A$$

$$O_{m \times n} + A = A \quad \text{同様}$$

$$\begin{aligned} [a_{ij}] + [0] &= [a_{ij} + 0] \\ &= [a_{ij}] \end{aligned}$$

A, B, C は $m \times n$ 行列とすると

$$(A+B)+C = A+(B+C) \text{ が成り立つ}$$

$$[A=[a_{ij}] \quad B=[b_{ij}] \quad C=[c_{ij}] \text{ とすると}$$

$$(A+B)+C = [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]$$

$$= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] = A+(B+C)$$

$$A+B = B+A$$

$$\begin{aligned} [A+B] &= [a_{ij}+b_{ij}] \\ &= [b_{ij}+a_{ij}] = [B+A] \end{aligned}$$

A は $m \times n$ 行列 B は $n \times l$ 行列とすると

$$A = [a_{ij}] \quad B = [b_{jk}] \text{ とすると}$$

和 $\sum$

AB (行列 A と B の積) は $m \times l$ 行列?

$$\text{成分は } a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

と表わされる。

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{bmatrix}$$

↑ Row

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \times 3 \\ 3 \times 3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 & 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 \\ 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 & 4 \times 2 + 5 \times 3 + 6 \times 4 & 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 \end{bmatrix}$$

A は 2×3 B は 3×4 行列とすると

AB は定義? 2×4 行列になるか

BA は 3×3 2×3

定義されたい。 $m \times n$ $n \times m$

A と B が $m \times n$ 行列とすると $AB \neq BA$ かつ
 $m \times m$ 行列になるが AB と BA は必ずしも等しく
ない。

例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

とすると

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{bmatrix}$$