

復習 行列の積

A を $m \times m$ -行列 B を $m \times n$ -行列とす

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} \quad B = [b_{jk}]_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} \quad \text{と仮定す}$$

$$AB = \left[\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$$

と定義する。

例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

行列の計算は
非可換である

と例示の場合も $AB \neq BA$

単位行列 正交行列で 左上が、右下への対角線上に
1 残る M ほかの成分はすべて 0

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ある $m \times m$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対し,

$$AE_m = A$$

$$E_m A = A$$

$$E_m = [e_{ij}] \text{ とする } e_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

AE_m の (i, k) 成分 $(1 \leq i, k \leq m)$

$$= \sum_{j=1}^m a_{ij} e_{jk}$$

$$e_{jk} = 1 \text{ かつ } 0 \text{ 以外の } j \text{ に対して } e_{jk} = 0$$

$$= a_{ik} = A \text{ の } (i, k) \text{-成分}$$

したがって $AE_m = A$ 同様

$$E_m A \text{ の } (i, k) \text{-成分} = \sum_{j=1}^m e_{ij} a_{jk}$$

$$e_{ij} = 1 \text{ かつ } 0 \text{ 以外の } j \text{ に対して } e_{ij} = 0$$

$$= a_{ik} = A \text{ の } (i, k) \text{-成分}$$

$$E_m A = A$$

A, B を $m \times n$ 行列とすると、 $A = [a_{ij}]$ $B = [b_{ij}]$

と $A+B$ は $m \times n$ 行列

$A+B = [a_{ij} + b_{ij}]$ 数のたし算は可換と定義する.

$$A+B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B+A$$

$$A + O_{m \times n} = A \quad r \sim$$

$$A \text{ と } m \times m \text{ 行列とすると, } A O_{m \times n} = O_{m \times n}$$

$$O_{l \times m} A = O_{l \times m}$$

$O_{m \times n}$: $m \times n$ 行列で成分がすべて0の
(ゼロ行列)

和と積の結合則

$$(1) (A+B)+C = A+(B+C)$$

$$(2) (AB)C = A(BC)$$

証明 (1): $A = [a_{ij}]$ $B = [b_{ij}]$ $C = [c_{ij}]$

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\ &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\ &= A+(B+C) \end{aligned}$$

$$A+B = [a_{ij}+b_{ij}]$$

$$(2): A = [a_{ij}] \quad B = [b_{jk}] \quad C = [c_{kl}]$$

$1 \leq i \leq m$ $1 \leq j \leq n$ $1 \leq k \leq n$ $1 \leq l \leq p$

よって, AB の (i, k) 成分は $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$

$(AB)C$ の (i, l) 成分は $(a_{i1}b_{1k}c_{kl} + a_{i2}b_{2k}c_{kl} + \dots + a_{in}b_{nk}c_{kl})$ となる?

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl}$$

$\underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}}_{AB \text{ の } (i, k) \text{ 成分}} \quad (0+0+\dots+0)c_{kl}$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} (b_{jk} c_{kl})$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n b_{jk} c_{kl} \right)}_{BC \text{ の } (j, l) \text{ 成分}} = A(BC) \text{ の } (i, l) \text{ 成分}$$

$$(AB)C = A(BC)$$

である。

行列のスカラー倍

scalar multiplication

A を $m \times n$ 行列とし $a \in \mathbb{R}$ とするとき、

aA を $m \times n$ 行列? $A = [a_{ij}]$ とするとき、

$$(A \text{ の } a \text{ 倍}) \quad aA = [aa_{ij}]$$

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

スカラー倍の結合性

$$(1) \underbrace{a}_{\text{スカラー倍}} (\underbrace{bA}_{\text{数の計算}}) = (ab) \overbrace{A}^{\text{スカラー倍}}$$

$$(2) a(AB) = (aA)B$$

$$(3) 0A = O_{m \times n}$$

$$(4) 1A = A$$

証明 (2) のみ示す。

$$A = [a_{ij}] \quad B = [b_{jk}]$$

AB の (i, k) 成分

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

$a(AB)$ の (i, k) 成分

$$= a \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) = \textcircled{\nearrow}$$

$$\textcircled{1} = \sum_{j=1}^n (a_{ij}) b_{jk} = \boxed{(aA)B \text{ の } (i, k) \text{ 成分}}$$

↑
aA の (i, j) 成分

$$\text{L.H.S. } a(AB) = (aA)B. \quad \square$$

行列の和と積の分配則

$$(1) \quad a(A+B) = aA + aB$$

$$(2) \quad (a+b)A = aA + bA$$

$$(3) \quad A(B+C) = AB + AC$$

$$(4) \quad (A+B)C = AC + BC$$

$$(1): \quad A = [a_{ij}] \quad B = [b_{ij}] \quad \text{とすると}$$

$$\boxed{a(A+B) \text{ の } (i, k) \text{ 成分}} = a(a_{ik} + b_{ik}) = a a_{ik} + a b_{ik}$$

$$\boxed{aA + aB \text{ の } (i, k) \text{ 成分}} = a a_{ik} + a b_{ik}$$

$$\begin{matrix} [a a_{ik}] & [a b_{ik}] \end{matrix} \quad \text{L.H.S. } a(A+B) = aA + aB$$

$$(2): \quad \boxed{(a+b)A \text{ の } (i, k) \text{ 成分}} = (a+b)a_{ik} = \underbrace{a a_{ik}}_{aA \text{ の } (i, k) \text{ 成分}} + \underbrace{b a_{ik}}_{bA \text{ の } (i, k) \text{ 成分}}$$

$$= \boxed{aA + bA \text{ の } (i, k) \text{ 成分}}$$

L.H.S.

$$(a+b)A = aA + bA$$

(3): A は $m \times n$ -行列 B と C は $m \times n$ -行列とす?

$A(B+C)$ の (i,k) -成分

$$A = [a_{ij}]$$

$$B = [b_{jk}]$$

$$C = [c_{jk}]$$

$$= \sum_{j=1}^m a_{ij} (b_{jk} + c_{jk})$$

$$= \sum_{j=1}^m (a_{ij} b_{jk} + a_{ij} c_{jk})$$

$$B+C \text{ の } (j,k) \text{ 成分} = b_{jk} + c_{jk}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \right) + \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} c_{jk} \right)$$

$\nwarrow$ AB の (i,k) -成分

$\nwarrow$ AC の (i,k) -成分

$$= AB + AC \text{ の } (i,k)\text{-成分}$$

C は $n \times n$?

$$A(B+C) = AB + AC$$

253, (4) は同様.

$$a^2 + 3a + 2 = (a+2)(a+1)$$

例 A は $n \times n$ 正則行列とす

$$A^2 + 3A + 2E_n = (A + 2E_n)(A + E_n)$$

$$A(A + E_n) + 2E_n(A + E_n)$$

$$A^2 + \underbrace{A E_n}_A + 2 \underbrace{E_n A}_A + 2 \underbrace{E_n E_n}_{E_n}$$

$$= A^2 + 3A + 2E_n$$

A, B を同じサイズの行列とすると

$$(A+B)^2 = (A+B)\underline{(A+B)}$$

$$= A(A+B) + B(A+B)$$

分配則
(4)
分配則
(3)

$$= A^2 + AB + BA + B^2$$

二つの項を
足し合!!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\underline{ab} + b^2$$