復習　行列の積法

A を $m \times m$-行列 B を $m \times n$ 行列として

$A=[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le m}}$　$B=[b_{jk}]_{\substack{1\le j\le m\\1\le k\le n}}$ とするとき

$m \times n$-行列

$$AB=\left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}\right]_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le n}}$$

として定義する。

Σ（大文字のシグマ）は和をあらわすときにつかう

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{im}b_{mk}$$

例

$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

2×2　　2×2

$$AB=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

となり この場合も $AB \neq BA$

行列のかけ算は非可換である

ただし $AB=BA$ となる場合もある

単位行列 正方行列で 左上から右下への対角線上に 1 がならび ほかの成分はすべて 0

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

すべての $m \times m$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対し，

$$AE_m = A$$

$$E_m A = A$$

$E_m = [\delta_{ij}]$ とおくと $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$

クロネッカーのデルタ 教科書 p.4 を参照
(Kronecker 19世紀後半のドイツの数学者
「クローネカ」の方が原音に近い)

AE_m の (i,k) 成分 $(1 \leq i, k \leq m)$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \delta_{jk}$$

$\delta_{kk} = 1$ でその他の j では $\delta_{jk} = 0$

$$= a_{ik} = A \text{ の } (i,k)\text{-成分}$$

したがって $\underline{AE_m = A}$ 同様に

$\delta_{ii} = 1$ それ以外の j では $\delta_{ij} = 0$

$$E_m A \text{ の } (i,k)\text{-成分} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} a_{jk}$$

$$= a_{ik} = A \text{ の } (i,k)\text{-成分}$$

したがって $E_m A = A$

A, B を $m\times n$ 行列とするとき，$A=[a_{ij}]$　$B=[b_{ij}]$

として $A+B$ は $m\times n$ 行列で

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$$

数のたし算は可換

と定義される.

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]=[b_{ij}+a_{ij}]$$
$$=B+A$$

$$A+O_{m\times n}=A$$

注意：　手書きの r は　となっている
ことがある.

A を $m\times m$ 行列として，

$$AO_{n\times n}=O_{m\times n}$$

$$O_{l\times m}A=O_{l\times m}$$

以下では，行列の足し算と掛け算が数の掛け算と足し算と類似の計算規則を満たすことが示されている

$O_{m\times n}$: $m\times n$ 行列で成分がすべて0のもの
(ゼロ行列)

$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$

和と積の結合則

(1) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(2) $(AB)C=A(BC)$

証明　(1)：$A=[a_{ij}]$　$B=[b_{ij}]$　$C=[c_{ij}]$

$$(A+B)+C=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]$$
$$=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]$$
$$=A+(B+C)$$

教科書8ページの「計算の性質」で「結合律」として挙げられている性質

各成分の計算は数の足し算の結合律が使えるのでこの等号が成り立つことがわかる

(2): $A=[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}$, $B=[b_{jk}]_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le k\le n}}$, $C=[c_{kl}]_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le p}}$

として, AB の (i,k) 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$

$\boxed{(AB)C \text{ の } (i,l) \text{ 成分}}$ は $=(a_{i1}b_{1k}c_{kl}+a_{i2}b_{2k}c_{kl}+\cdots+a_{im}b_{mk}c_{kl})$

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}}_{AB\text{の}(i,k)\text{成分}}\Big)c_{kl} \qquad (0+0+\cdots 0)c_{kl}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}c_{kl}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}c_{kl})$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_{jk}c_{kl}}_{BC\text{の}(j,l)\text{成分}}\Big)=\boxed{A(BC)\text{ の }(i,l)\text{ 成分}}$$

である.

したがって

$$(AB)C=A(BC)$$

行列のスカラー倍

scalar multiplication

['skeɪlə]

実数の全体を $\mathbb{R}$ であらわす．実数は数直線上の各点に対応する数のこと．

A を $m \times n$ 行列として $a \in \mathbb{R}$ とするとき，

aA を $m \times n$ 行列で $A = [a_{ij}]$ とするとき，

(A の a 倍)

$$aA = [a\,a_{ij}]$$

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

スカラー倍の結合法則

(1) $\underbrace{a(\underbrace{bA}_{\text{スカラ倍}})}_{\text{スカラ倍}} = \underbrace{(ab)}_{\text{数の計算}}\overbrace{A}^{\text{スカラ倍}}$

(2) $a(AB) = (aA)B$

(3) $0A = O_{m \times n}$

(4) $1A = A$

証明 (2)のみ示す．

$A = [a_{ij}]$ $B = [b_{jk}]$

AB の (i,k)-成分

$$= \sum_{j=1}^{\cdots} a_{ij} b_{jk}$$

$\boxed{a(AB)\text{ の }(i,k)\text{-成分}}$

$$= a\left(\sum_{j=1} a_{ij} b_{jk}\right) =$$

$① = \sum_{j=1}^{\cdots} (a a_{ij}) b_{jk} = \boxed{(aA)B \text{ の } (i,k) \text{成分}}$

$\uparrow$

aA の(i,j)成分

したがって　$a(AB) = (aA)B$.　☒

行列の和と積の分配律

(1) $a(A+B) = aA + aB$

(2) $(a+b)A = aA + bA$

(3) $A(B+C) = AB + AC$

(4) $(A+B)C = AC + BC$

(1)： $A = [a_{ij}]$　$B = [b_{ij}]$ とすると

$\boxed{a(A+B) \text{ の } (i,j)\text{-成分}} = a(a_{ij} + b_{ij}) = a a_{ij} + a b_{ij}$

$\boxed{aA + bB \text{ の } (i,j)\text{-成分}} = a a_{ij} + a b_{ij}$

$[a a_{ij}]$　$[a b_{ij}]$

したがって　$a(A+B) = aA + aB$

(2)：

$\boxed{(a+b)A \text{ の } (i,j)\text{-成分}} = (a+b)a_{ij} = \underbrace{a a_{ij}}_{aA\text{の}(i,j)\text{-成分}} + \overbrace{b a_{ij}}^{bA\text{の}(i,j)\text{成分}}$

$= \boxed{aA + bB \text{ の } (i,j)\text{-成分}}$

したがって

$(a+b)A = aA + bB$

(3)：A を $m\times m$-行列　B と C を $m\times n$ 行列とする。

$m\times n$ 行列

$\boxed{A(B+C) \text{ の } (i,k)\text{-成分}}$

$A=[a_{ij}]$

$B=[b_{jk}]$

$C=[c_{jk}]$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,(b_{j,k}+c_{j,k})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (a_{ij}b_{jk}+a_{ij}c_{jk})$$

$\boxed{B+C \text{ の } (j,k) \text{ 成分} = b_{jk}+c_{j,k}}$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{jk}\right)$$

AB の (i,k) 成分　　AC の (i,k) 成分

$= \boxed{AB+AC \text{ の } (i,k)\text{-成分}}$

したがって

$A(B+C) = AB+AC$

である。(4) も同様。

教科書の　例題 1.2.2 (1).

a^2+3a+2
$=(a+2)(a+1)$

<u>例</u>　A を正方行列とすると（$m\times m$）

$$A^2+3A+2E_m \qquad (A+2E_m)(A+E_m)$$

$$= A(A+E_m)+2E_m(A+E_m)$$

$$= A^2 + \underbrace{AE_m}_{A} + 2\underbrace{(E_mA)}_{A} + 2\underbrace{(E_mE_m)}_{E_m}$$

$$= A^2+3A\ 2E_m$$

A, B を同じサイズの正方行列とするとき

$$(A+B)^2 = (A+B)\underline{(A+B)}$$

$$\overset{分配律(4)}{=} A(A+B) + B(A+B)$$

$$\overset{分配律(3)}{=} A^2 + AB + BA + B^2$$

これらは必ずしも等しくない!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\underline{ab} + b^2$$

教科書の　例題 1.2.2 (2)

用語に関する注意：教科書で，結合律，分配律と呼ばれている演算の性質は，英語では，それぞれ associativity, distributivity です．これらの性質は，結合則，分配則と呼ばれることもあります．

単位行列は E で表されていますが，これはドイツ語の die Einheit (単位)という単語から来ています．英語では単位行列は identity matrix というので，これに関連づけて，単位行列を I であらわす書き方になっているテキストもあります．