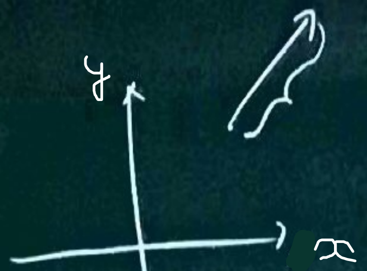
平面(または空間)ベクトル(vector)

平面(または，3次元空間またはこの一般化としての n 次元空間)でのベクトルを次のようなものとする。
簡単のために主に平面上で考える。

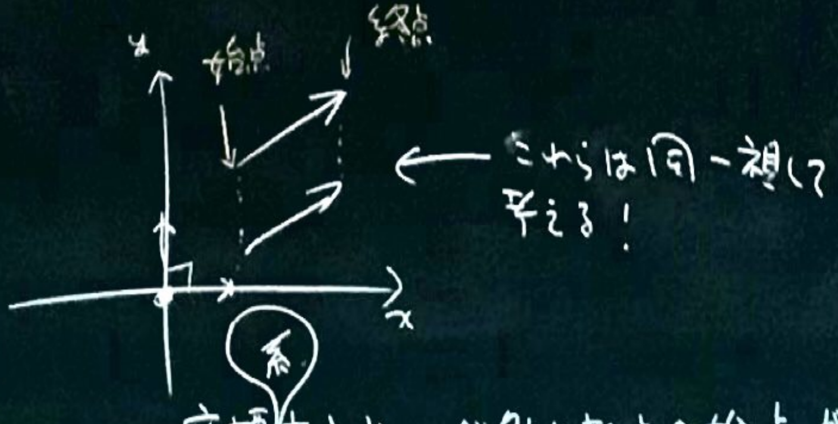
平面上での方向と大きさを持った対象を平面ベクトルとよぶ。 平面ベクトルはその大きさを長さとして持つ矢印つきの線分であらわされる。

←簡単に矢印と言うことにする



この板書と次回の板書は教科書に対応しません.
2015年の講義の際に作成した lecture note
https://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg1-ss15LN.pdf
を参考にしてください.

ベクトルはその始点の位置は依存しないものとする。



平面上に座標を入れてベクトルをその始点が原点に重なるように移動したときに終点の指している点の座標を (m,n) とするとき，これに列ベクトル $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ を対応させる。

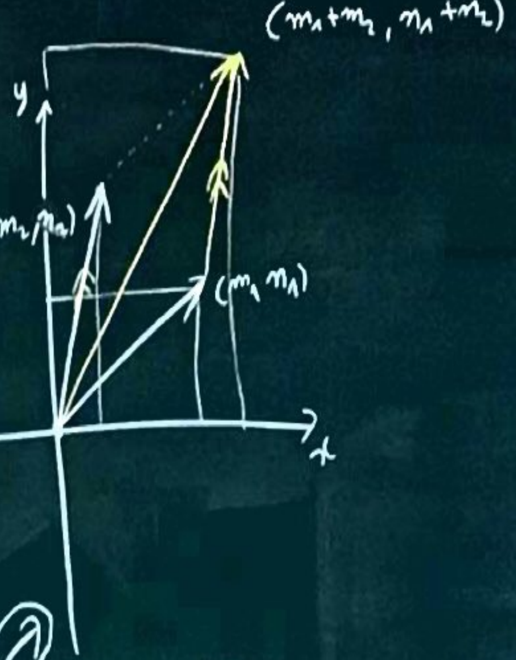
行列の計算はこの形のベクトルに対しては 平面ベクトルと列ベクトルと同様に a, b, c, … $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ などとしてあらわす。

加法

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1+m_2 \\ n_1+n_2 \end{bmatrix}$$

スカラー倍　$a \in \mathbb{R}$

$$a\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am \\ an \end{bmatrix}$$



列ベクトルの和は

2つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix}$　$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix}$

に対し $\mathbf{a}$ の始点を原点にとり $\mathbf{b}$ の始点を $\mathbf{a}$ の終点にとったときに $\mathbf{b}$ の終点のさしている点の座標に ㋐

㋐ 対応する平面ベクトルの表現をあたえるものになっている.

スカラー倍

scalar

[ˈskeɪlə]

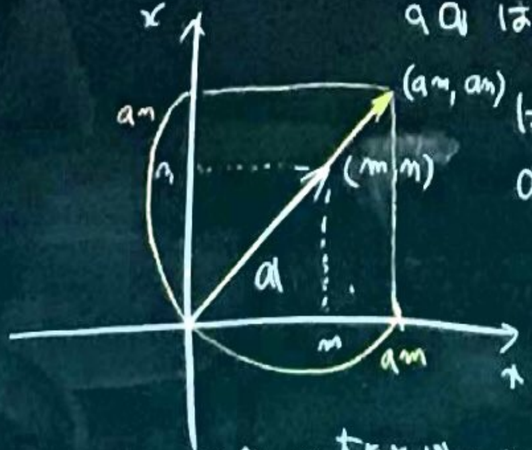
スケール

縮尺

$a \in \mathbb{R}$ が $a \geq 0$ のときには

(たとえば $1 \leq a < \infty$ のとき)

$a\mathbf{a}$ は $a\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am \\ an \end{bmatrix}$

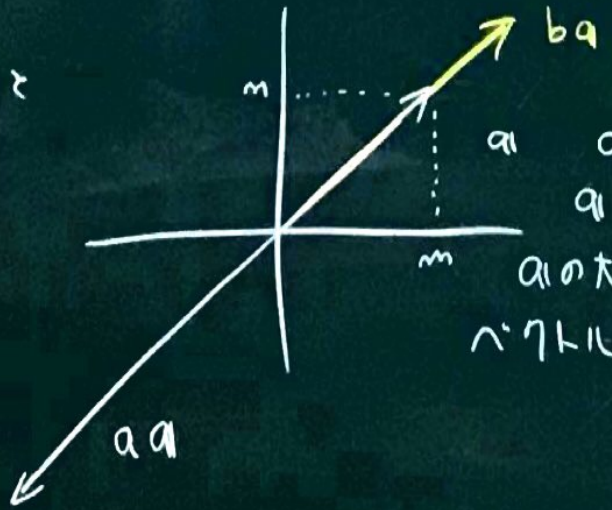


に対応するがこれは, $\mathbf{a}$ と同じ方向で大きさがもとのベクトル $\mathbf{a}$ の a 倍のベクトルとなる.

$a=0$ のときには $a\mathbf{a}$ は大きさが0で方向も定まらない $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対応する ゼロベクトルになる.

$a \in \mathbb{R}$　$a \leq 0$ のとき。このときには $|a| = b$
(つまり $b = -a$)
として

とすると



$a\mathbf{a}$ は向きが $\mathbf{a}$ と逆で、大きさが $\mathbf{a}$ の大きさの $|a|$ 倍のベクトルになる。

前回と前々回やったように平面ベクトルに対して次のような計算則が成り立つ。

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

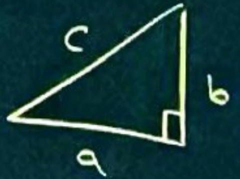
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$a(b\mathbf{a}) = (ab)\mathbf{a}$$

$$a(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = a\mathbf{a} + b\mathbf{a}$$

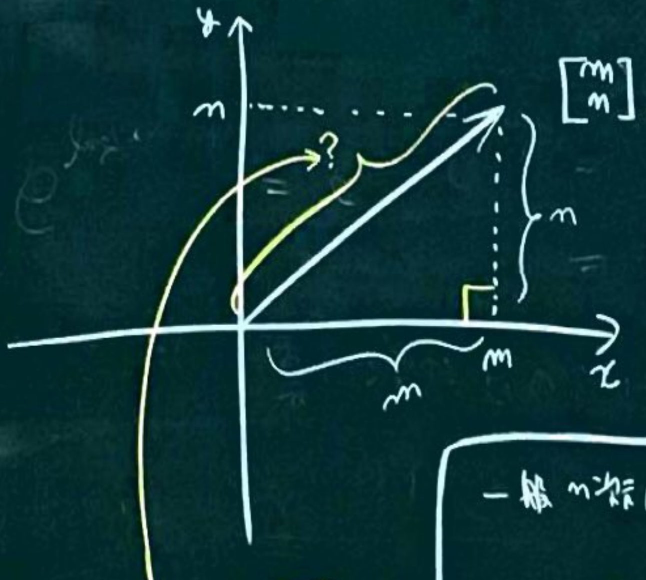
$$(a+b)\mathbf{a} = a\mathbf{a} + b\mathbf{a}$$

ベクトルの大きさ（長さ）



$$a^2+b^2=c^2$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

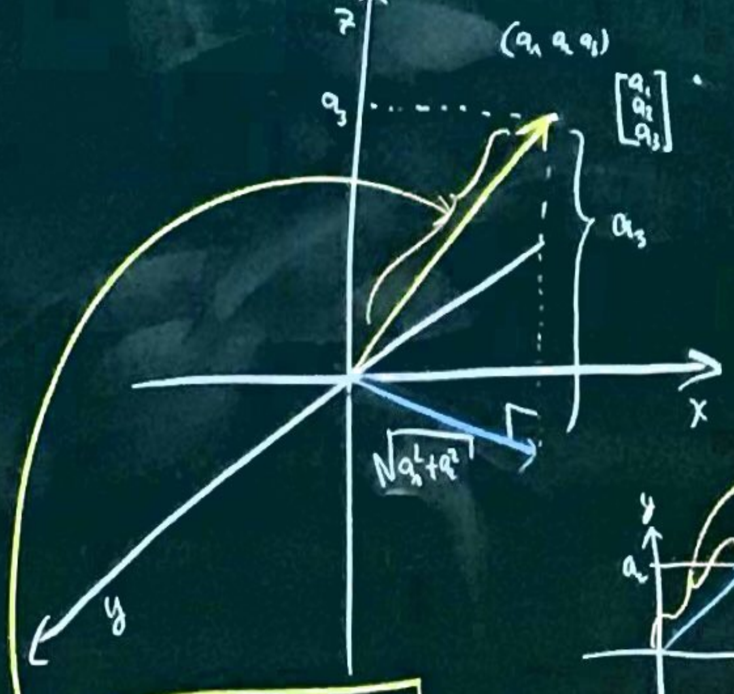


$$\sqrt{m^2+n^2}$$

一般 n次元ベクトル $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ の大きさを

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2 \cdots\cdots a_n^2}$$

となる。



$$\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2+a_3^2}$$

$$=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

平面ベクトルの全体から平面ベクトルの全体への
変換(写像)を考えて、各ベクトルに対し、
そのベクトルの2倍の長さを持つベクトルを
対応させる変換を考える $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}$

この変換は、各ベクトルに
行列 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ をかけるという計算

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

ととらえることができる。

一般にベクトル $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ に左から 2×2 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$
をかけるという変換を考えたとき、これが何になるかを
考えてみたい。(目標 このような変換が1次変換
あるいは線形変換とよばれるものに一致することを確かめる)

行列の計算則から

(1) $A(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = A\mathbf{a} + A\mathbf{b}$

(2) $A c\mathbf{a} = cA\mathbf{a}$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

が成り立つ!

平面ベクトルの変換 φ

φ : 平面ベクトルの全体 $\longrightarrow$ 平面ベクトルの全体

平面ベクトルの全体と平面上の点の全体 $\mathbb{R}^2$ を同一視して $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とも書くことにする.

が

(1) $\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})$

(2) $\varphi(c\mathbf{a}) = c\varphi(\mathbf{a})$, $c \in \mathbb{R}$

を満たすとき, φ は線形変換であるという.

2×2 行列 A に対し, A を (2次の列ベクトルに) 左からかけることで得られる変換は線形変換である.

実は, この逆も成り立つ.

つまり, 任意の線形変換 φ に対して行列 A_φ をうまくとると すべての平面ベクトル $\mathbf{a}$ について

$$\varphi(\mathbf{a}) = A_\varphi \mathbf{a}$$

となるようにできる.

応用 平面ベクトルを始点を固定して反時計まわりに θ 度回転するという変換は線形変換である.

したがってこの回転を表現する 2×2 行列 R_θ が存在する

つまり "$R_\theta \mathbf{a}$ は $\mathbf{a}$ を反時計回りに θ 回転させたもの" となる R_θ がとれる.

反時計回りにθベクトルを回転させる変換を
φ_θ と書くことにする.

このとき $\varphi_\theta(a+b) = \varphi_\theta(a) + \varphi_\theta(b)$

$\varphi_\theta(ca) = c\,\varphi_\theta(a)$

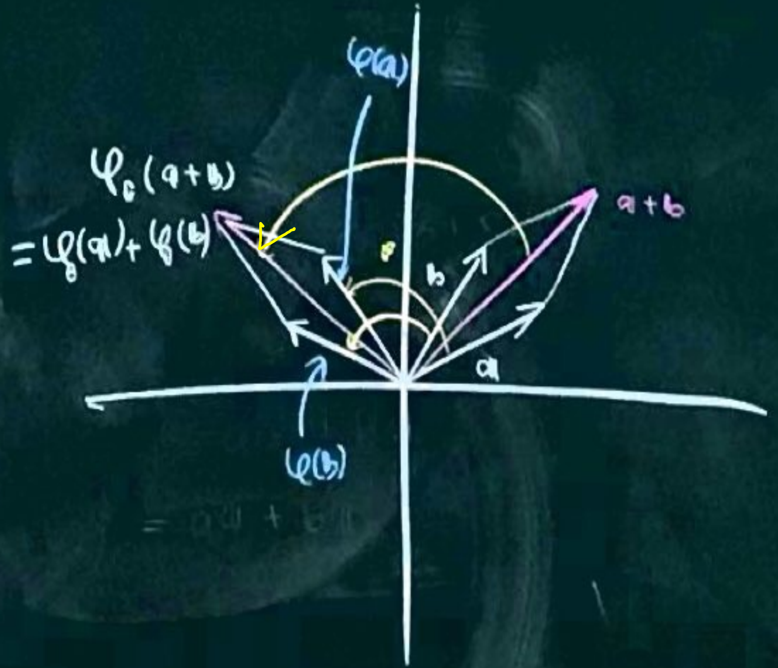
を示したい

実数の全体

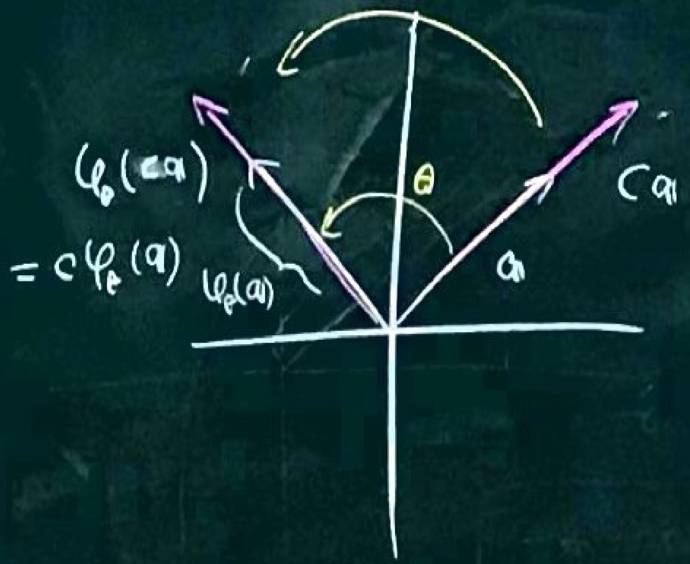
$c \in \mathbb{R}$

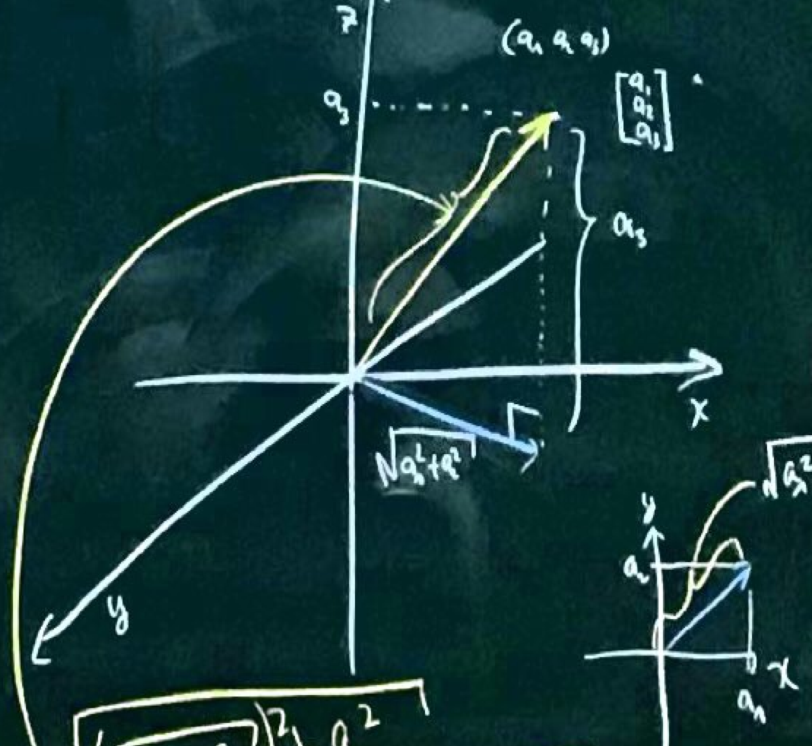
要素である

Cは実数である



次回に続く





$$\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2+a_3^2}$$
$$=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$