

平面 (または空間) ベクトル (vector)

平面 (または, 3次元空間またはこの一般化としての n 次元空間) でのベクトルを次のように定める。
簡単のために主に平面上で考える。

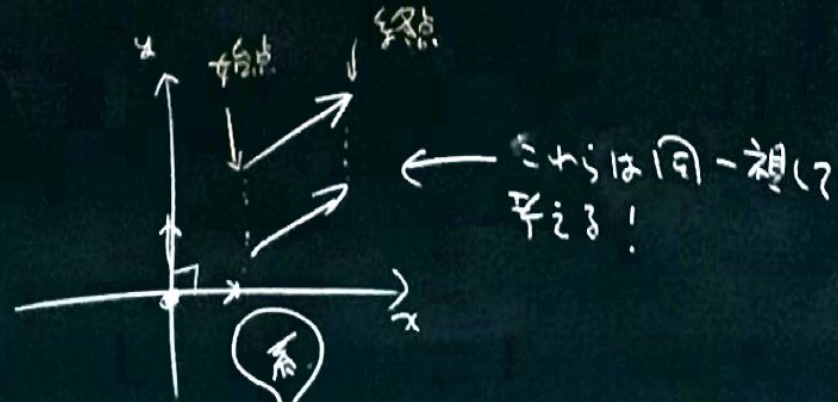
平面上での 方向 と 大きさ を持った対象を平面ベクトルとみる。平面ベクトルはその大きさを

長として持 矢印 の線分であらわされる。

→ 矢印
矢印 = 向き



ベクトルはその始点の位置は依存しないものとする。



平面上に座標を入れてベクトルをその始点が原点に重なりように移動したときに終点の座標を (m, n) とするとき、これは 列ベクトル $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ を対応させる。

行列の計算はこの形のベクトルに対して
平面ベクトルと列ベクトルと同様に $a, b, c, \dots \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
などであらわす。

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 \\ n_1 + n_2 \end{bmatrix}$$

スカラー倍 $a \in \mathbb{R}$

$$a \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am \\ an \end{bmatrix}$$

2つのベクトルの和は

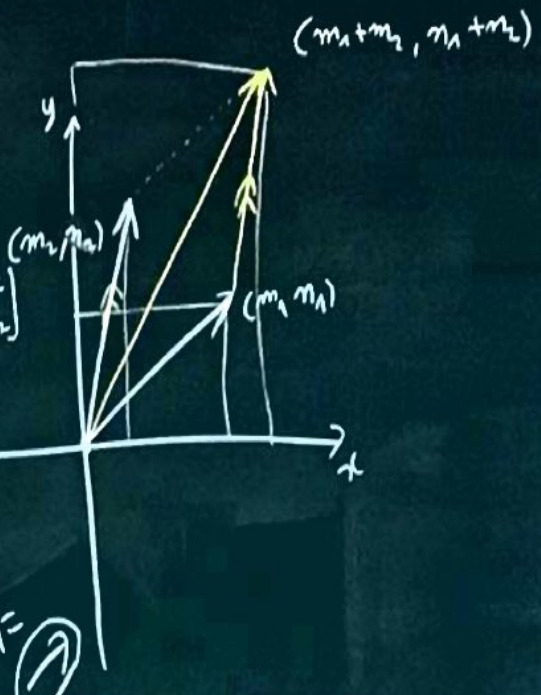
$$2つのベクトル a = \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

に対し a の始点を

原点にとり b の始点を

a の終点にとれば

b の終点の座標は $(m_1 + m_2, n_1 + n_2)$



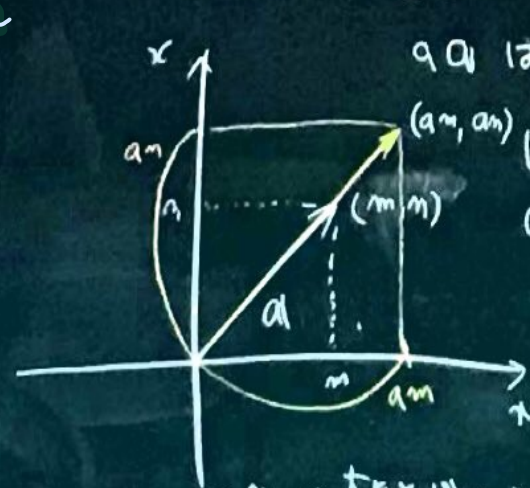
⑦ 対応する 2 次元ベクトルの表現を与えるものに
なる。

スカラー倍

$a \in \mathbb{R}$ かつ $a \geq 0$ のときは
(a のときは $1 \leq a < \infty$ のとき)

Scalar
['skeɪlə]

スケール
縮尺



$$a a \text{ は } a \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am \\ an \end{bmatrix}$$

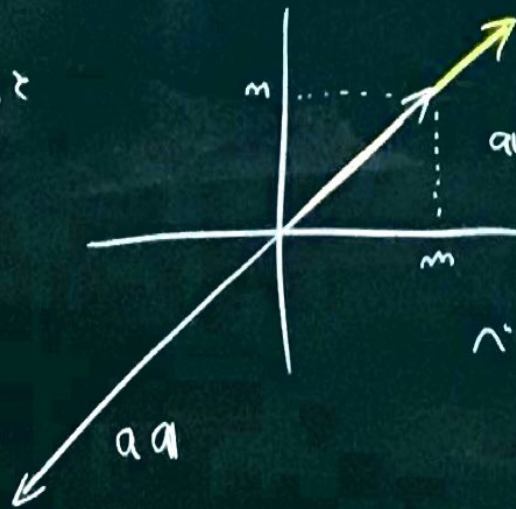
に対応するがこれより、
 a が同じ方向に大きさが
もとのベクトル a の a
倍のベクトルである。

$a=0$ のときは $a a$ は大きさが 0 で
方向も定まらない $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対応する 0 のベクトルである。

$a \in \mathbb{R}$ $a \leq 0$ のとき, このとき $|a| = -a$
(つまり $b = -a$)

と

とすると



a は向きが
 a と逆で, 大きさが
 a の大きさの $|a|$ 倍の
ベクトルになる。

前問と前々問より, さらに平面ベクトルに対して
次のような計算規則が成り立つ。

$$a + b = b + a$$

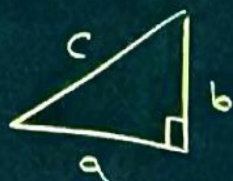
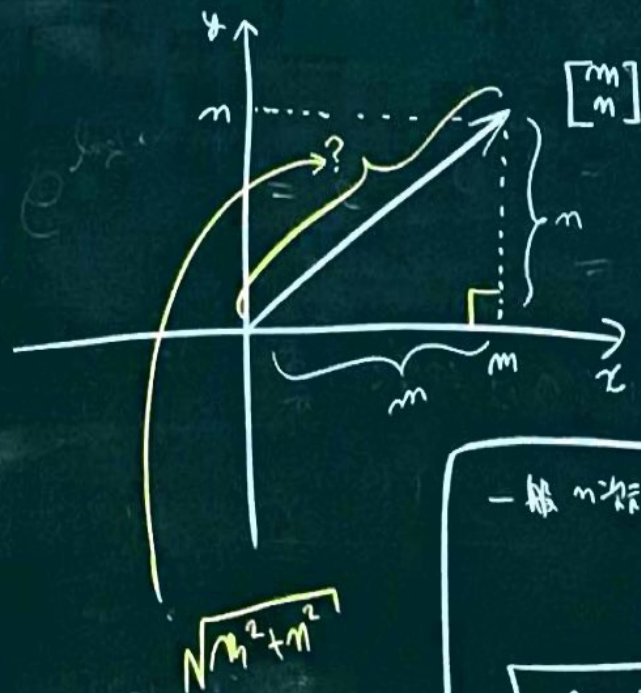
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a(ba) = (ab)a$$

$$a(a + b) = aa + ba$$

$$(a + b)a = aa + ba$$

ベクトルの大きさ (長さ)



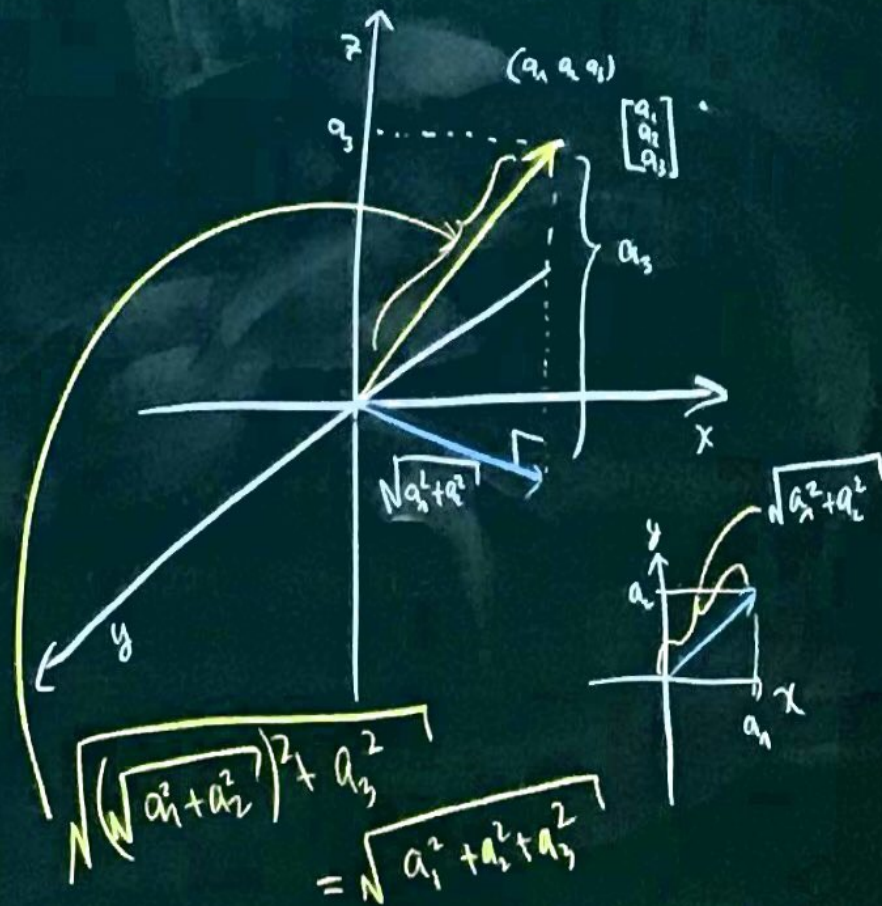
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

一般 n 次元ベクトル $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ の大きさを

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

と表す。



平面ベクトルの全体から平面ベクトルの全体への
変換 (写像) を考える。各ベクトルに対し、
そのベクトルの2倍の長さを持つベクトルに
対応させる変換を考える $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix}$

この変換は、各ベクトルに
行列 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ をかけるという計算

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

と与えられる。

一般にベクトル $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ に対して 2×2 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

をかけるという変換を考えるとき、これが何に相当するかを
考えてみたい。(目標: このような変換が「線形変換」
あるいは線形変換とよばれるものに一致することを確かめる)

行列の計算則から

$$(1) A(a+b) = Aa + Ab$$

$$(2) Aca = cAa \quad c \in \mathbb{R}$$

が成り立つ!

平面ベクトルの変換 φ

$\varphi: \text{平面ベクトルの全体} \rightarrow \text{平面ベクトル}$
が

$$(1) \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$(2) \varphi(ca) = c\varphi(a), \quad c \in \mathbb{R}$$

を満たすとき、 φ は線形変換であるという。

2×2 行列 A に対し、 A を (2次の) ベクトルに
左からかけることで得られる変換は線形変換である。

実は、この逆も成り立つ。

つまり、任意の線形変換 φ に対し

行列 A_φ をうまくとると φ の平面ベクトル a
については

$$\varphi(a) = A_\varphi a$$

と表わすことができる。

応用 平面ベクトルを時計と固定に反時計まわりの角度、
回転するという変換は線形変換である。

したがって、この回転を表現する 2×2 行列 R_θ が存在する。

つまり " $R_\theta a$ は a を反時計回りの θ 度回転させたもの。"

なお、 R_θ は

反時計回りに θ ベクトルを回転させる変換を φ_θ と置くことにする.

$$\therefore a \text{ と } b \text{ とき } \varphi_\theta(a+b) = \varphi_\theta(a) + \varphi_\theta(b)$$

$$\varphi_\theta(ca) = c\varphi_\theta(a)$$

を示したい

$\mathbb{C} \in \mathbb{R}$ ← 実数の全体

↑
要素は

$\mathbb{C}$ は実数である

