今回の講義では，平面上のベクトルの線形変換（一時変換または線形写像と呼ぶこともあります）について更に考察します．前回の講義の後半の続きです．

補題4.1 と 定理 4.2で線形変換と 2×2 行列を左らかけるという演算が一対一に対応していることが示されています．

これは，前回の講義の補足資料の (0.3)，(04) と 補題 0.2 に対応しています．実は，この事実は，ほとんど同じ証明で，平面上のベクトルの線形変換だけではなくて，もっと一般的に任意の次元の線形空間の間の線形写像に対して成り立ちます．このことは教科書ではちょっとわかりにくく書いてあるのですが，5.2線型写像の表現行列　が対応します．

講義の後半では，平面上のベクトルの内積について考察しています．内積は平面だけでなく任意の次元の線形空間で考えることができるのですが，この一般化された内積の議論は，教科書の　6 内積空間　に書かれています．

自然数　n ≧ 1 に対し，$\mathbb{R}^n$ で n 次元縦ベクトルの全体を表します．特に

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

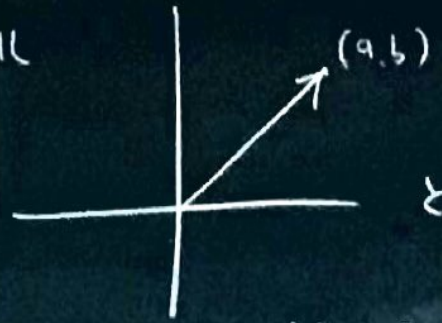
です．n=1 のときには

$$a \leftrightarrow [a] \ , \ a \in \mathbb{R}$$

という同一視をして $\mathbb{R}^1$ と $\mathbb{R}$ は同じものだと考えることにします．

復習

平面ベクトル



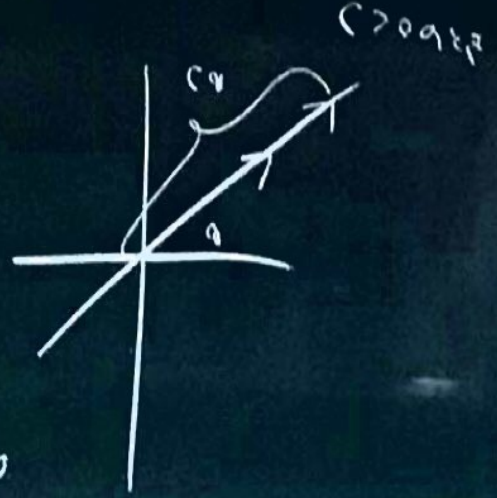
と

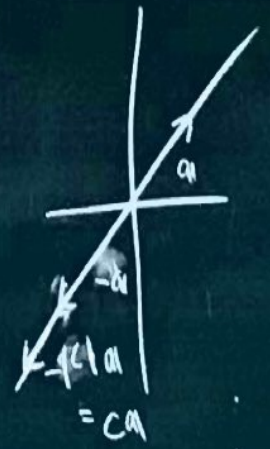
列ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を同一視する

特に, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ に対して

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$c\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \end{bmatrix}$$ は





$c<0$
のとき

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

平面ベクトルの全体

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が線形変換とは、

変換
写像
(関数)

(1) すべての $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})$$

(2) すべての $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi(c\mathbf{a}) = c\varphi(\mathbf{a})$$

が成り立つこと。

<u>補題 4.1</u> A を2次行列とするとき、

$$\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{a} \longmapsto A\mathbf{a}$$

は線形変換である。

<u>証明</u>: (1): $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\varphi_A(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = A(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

$$= A\mathbf{a} + A\mathbf{b}$$

行列の(加法)分配則

$$= \varphi_A(\mathbf{a}) + \varphi_A(\mathbf{b})$$

(2): $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ $c \in \mathbb{R}$ のとき

$$\varphi_A(c\mathbf{a}) = A(c\mathbf{a}) = c(A\mathbf{a}) = c\varphi_A(\mathbf{a}).$$

$\boxtimes$

<u>定理 4.2</u> すべての線形変換 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し

$\varphi(\mathbf{a}) = \varphi_A(\mathbf{a})$ が すべての $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し成り立つ ような行列 A がただ1つ求まる。

つまり $\varphi = \varphi_A$

証明 φ を線形変換とすると、$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ なので

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \varphi\left(a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \varphi\left(b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \overset{(2)}{=} a\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + b\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

となる。 $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ とする。

このとき $\varphi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = a\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} a_{11}a + a_{12}b \\ a_{21}a + a_{22}b \end{bmatrix}}$$

したがって $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると、$\varphi = \varphi_A$

このような A は ただ1つにきまる：

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$ として $A \neq A'$

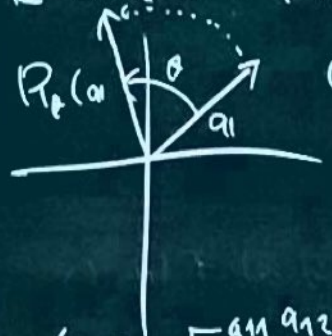
なら、たとえば $a_{11} \neq a'_{11}$ として

$\varphi_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ $\varphi_{A'}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \end{bmatrix}$ だが $\varphi_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \neq \varphi_{A'}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxtimes$

原点のまわりの半時計まわり（左回り）角度θだけ回転させる変換 R_θ は線形変換になるのだった



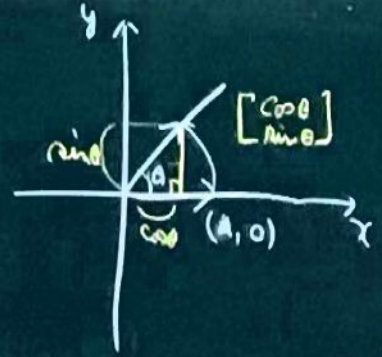
したがって定理4.2から、

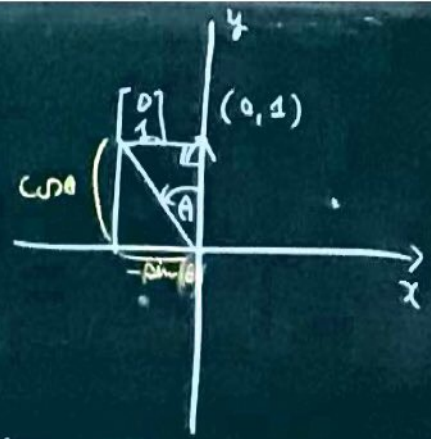
$$R_\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$ となる

行列 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ がとれる 証明から

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = R_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = R_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$ となる したがって





定理 4.3 回転 R_θ は行列

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ を左からかける演算と等しい

↑

この行列のことも R_θ とあらわす。

ベクトルを原点の回りに左回り角度 α だけ回転させ

さらにそれを角度 β 回転させることを考える

これは角度 $\alpha+\beta$ 回転させることと同じ

$a \in \mathbb{R}^2$ を $a = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ として

$$R_\beta\left(R_\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\parallel$$

$$R_{\alpha+\beta}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

したがって

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$\parallel$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & \cdots \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & \cdots \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

したがって

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

である.

行列 A の たてと よこを入れかえて 得られる行列を ${}^tA$ と書く

A の転置

transpose of A

ベクトルの内積

ベクトルの長さ(大きさ) は $|\mathbf{a}| = \sqrt{a^2+b^2}$ であらわされるのだった.

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$${}^t\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [a, b] \qquad {}^t\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [a, b]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= [ac+bd]$$

ここが $ac+bd$ と行列積

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{{}^t\mathbf{a}\,\mathbf{a}}$$

$$[a, b]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2+b^2$$

ベクトル $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ に対し ${}^t\mathbf{a}\,\mathbf{b} = [a_x\ a_y]\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積とよび $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ であらわす.

inner product

定理 4.4

A, B を $n\times m$, $m\times p$ 行列

とするとき ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ である

${}^tA = [\overset{a_{ij}}{a^t_{ji}}]$ ${}^tB = [\overset{b_{jk}}{b^t_{kj}}]$

証明 $A = [a_{ij}]$ $B = [b_{jk}]$ とし、

${}^t(AB)$ の (k, i)-成分 $=$ AB の (i, k)-成分

$$= \sum_j a_{ij} b_{jk} = \sum_j a^t_{ji} b^t_{kj}$$

$$= \sum_j b^t_{kj} a^t_{ji}$$

$$= {}^tB\,{}^tA \text{ の } (k, i) \text{ 成分}$$

したがって ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ である。

定理 4.5

内積は回転に関して不変である

任意の角度の

が成り立つ。

つまり $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (R_\theta(\mathbf{a}))\cdot(R_\theta(\mathbf{b}))$

任意の θ に対して、

証明 $(R_\theta(\mathbf{a}))\cdot(R_\theta(\mathbf{b}))$

$$= {}^t(R_\theta(\mathbf{a}))\,(R_\theta(\mathbf{b}))$$

$$= {}^t(R_\theta\mathbf{a})\,(R_\theta\mathbf{b})$$

$$= ({}^t\mathbf{a}\,{}^tR_\theta)(R_\theta\mathbf{b})$$

定理4.4

$$= {}^t\mathbf{a}\,\underbrace{({}^tR_\theta R_\theta)}_{=E}\,\mathbf{b}$$

$$= {}^t\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

■

$${}^tR_\theta = {}^t\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}$$

$$= R_{-\theta}$$

補題 4.6

$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$ のとき $\alpha > 0$ なら

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, $\alpha < 0$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

である

$|\alpha||\mathbf{b}| = |\alpha\mathbf{b}|$

証明

$\alpha > 0$ $\alpha < 0$ のとき

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ として

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \alpha\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$$
$$= \alpha|\mathbf{b}|^2$$
$$= \alpha|\mathbf{b}||\mathbf{b}|$$
$$= -|\alpha\mathbf{b}||\mathbf{b}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$
$$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = {}^t\mathbf{b}\,\mathbf{b}$$
$$= a^2 + b^2$$
$$= |\mathbf{b}|^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= [1, 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= 1\times 0 + 0\times 1$$
$$= 0$$

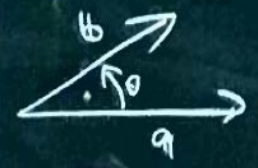
☒

補題4.7（演習：ヒント定理4.5を用いる）

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が直交するとき、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

定理 4.8

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とすると



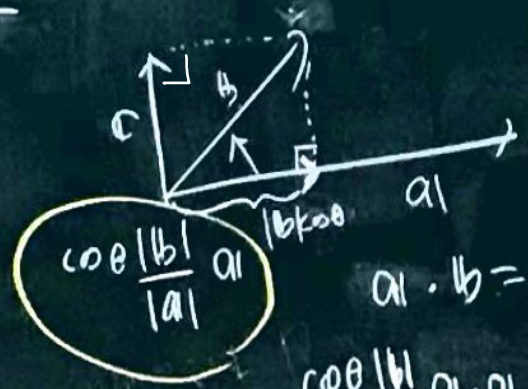
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta$$

である。

$\mathbf{a}$ と直行する下図のようなベクトル

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} + \frac{\cos\theta\,|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$$

証明



となるが

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{c} + \frac{\cos\theta\,|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right)$$

$$= \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \frac{\cos\theta\,|\mathbf{b}|}{\cancel{|\mathbf{a}|}}\underbrace{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}_{|\mathbf{a}|^{\cancel{2}}} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta.$$

$\because$ 補題4.7

☒

定理4.8は2つの平面ベクトルのなす角の角度θの定義とも見ることができる。式を変形すると、

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$$

ベクトルの内積

数のかけ算

となり、$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$のなす角を

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$$ とする

ようなθとして定義できる

<u>例</u> $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ として $\mathbf{a}$ と直行する長さが1のベクトル$\mathbf{b}$を求めてみる。(このようなベクトルは2つある)

$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$ として、

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ だから、

$1\cdot\alpha+2\cdot\beta=0$

$\Leftrightarrow \alpha=-2\beta$

したがって $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-2\beta\\\beta\end{bmatrix}$ である。

$|\mathbf{b}|=\sqrt{\beta^2+(-2\beta)^2}=1$ だから、

$5\beta^2=1 \Leftrightarrow \beta=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

したがって

$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}$ または $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}\\-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}$

である。[検算: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, $|\mathbf{b}|$となることをたしかめてみる]