今回の講義では、前回の講義での一次変換（線形変換、線形写像という言葉も同じ意味で使う。英語では linear transformation または linear mapping）

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の話を一般化して、任意の

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$ $m = 1, 2, 3, 4, \dots$

に対する線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ← m と n の順序は意図的に逆にしている

が考えられて前回の講義でやったことがほとんどそのままここでも言えることを見ます。この講義は、教科書の 5線形写像 pp.87-97 に書いてあることの特別な場合です。

$n = 1, 2, 3, 4$ に対し

$$\mathbb{R}^m = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} : a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$$

とする。つまり、 $\mathbb{R}^m$ は、 m -次元縦ベクトルの全体。

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは、任意の $u, v \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$ に対し

(1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$

(2) $f(au) = a f(u)$

が成り立つことである。例えば、 $n = m = 3$ のときには $\mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^2$ のときと同様に、座標系を入れた3次元空間と同一視できるから、写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は、3次元空間の点から3次元空間の点への変換、または $\mathbb{R}^3$ の部分集合としての空間図形 S の空間図形 $f[S]$ への変換と見ることができる。線形写像はこのような変換の特別な場合である。

次の2つの板書は、前回の板書を編集して作ったものである。

$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像の時、

(1) 任意の $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

(2) 任意の $a \in \mathbb{R}^n$ $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi(ca) = c\varphi(a)$$

$\leftarrow$ $\mathbb{R}$ は m と n の
順序を入れ替えて
いることに注意

が成り立つこと。

補題 4.1 A が $m \times n$ 行列の時、

$$\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; a \mapsto Aa$$

$\uparrow$ $m \times n$ 行列

$\leftarrow$ n 次元タテベクトル
(i.e. $m \times 1$ 行列)

は線形写像の時、

証明: (1): $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\varphi_A(a+b) = A(a+b)$$

$$= Aa + Ab$$

行列の
加算

$$\xrightarrow{\text{分配則}} = \varphi_A(a) + \varphi_A(b)$$

(2): $a \in \mathbb{R}^n$ $c \in \mathbb{R}$ とき

$$\varphi_A(ca) = A(ca) = c(Aa) = c\varphi_A(a).$$

定理 4.2 任意の線形変換 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対し

$$\varphi(a) = \varphi_A(a)$$

対応する行列 A が唯一に決まる。

任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ

$$\text{したがって } \varphi = \varphi_A$$

$\frac{1}{2}$ 例 φ を線形写像とする, $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ (対し)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + a_m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ となる}$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \right) = \varphi \left(a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots \right)$$

$$\stackrel{(1)}{\uparrow} \varphi \left(a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \varphi \left(a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \dots \stackrel{(2)}{\uparrow} a_1 \varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + a_2 \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \dots$$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots \text{ とする}$$

$$\Rightarrow \varphi \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \right) = a_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$(T=1, 2) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \text{ とすると, } \varphi = \varphi_A$$

よって A は $T \in F$ に依存する:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & \dots \\ \vdots & \\ a'_{m1} & \dots \end{bmatrix} \quad \text{と } A \neq A'$$

特に, $T \in F$ は $a_{11} \neq a'_{11}$ とし

$$\varphi_A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varphi_{A'} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) \neq \varphi_{A'} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \square$$