線形代数 1 — 2020 年 05 月 28 日の講義の後半

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

2020 年 05 月 28 日

以下は，2020 年 05 年 28 日に実施の線形代数 1 のオンライン講義の後半である．

例 4.1 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を，線型写像で，$\varphi(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$ となるものとする．このとき $\varphi = \varphi_A$ となる 3×3-行列 A を求める．

[第 4 回目の講義の virtual な板書 (1/2)] の定理 4.1 の証明から，$\varphi([\ ])$

φ は線型写像だから，$\varphi(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix})$, $\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})$, $\varphi(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$ を並べて作った行列 A が φ の表現行列 ($\varphi = \varphi_A$ となるような行列) になる．

ここで，φ が線型写像であることを使うと，$\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}) = \varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}) - \varphi(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$ だから，$A = \begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\2 & 2 & 0\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}$ である．

検算をしてみる，$\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\2 & 2 & 0\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\2 & 2 & 0\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\2 & 2 & 0\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$ だから，A は確かに求めるような行列になっている．

補題 4.3 線型写像の合成として得られる写像は線型写像である．

証明. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ を線型写像とする．このとき，φ と ψ の合成写像 $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$; $\mathbf{a} \mapsto \psi(\varphi(\mathbf{a}))$ が線型写像の性質 (1), (2) を満たすことを示す．

(1): $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ とするとき，

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \psi(\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b})) && (\text{合成関数の定義から}) \\
&= \psi(\varphi(\mathbf{a})+\varphi(\mathbf{b})) && (\varphi\ \text{は線型写像だから}) \\
&= \psi(\varphi(\mathbf{a}))+\psi(\varphi(\mathbf{b})) && (\psi\ \text{は線型写像だから}) \\
&= \psi \circ \varphi(\mathbf{a})+\psi \circ \varphi(\mathbf{b}) && (\text{合成関数の定義から})
\end{aligned}$$

(2): $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$、 $c \in \mathbb{R}$ とするとき，

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(c\mathbf{a}) &= \psi(\varphi(c\mathbf{a})) && (\text{合成関数の定義から}) \\
&= \psi(c\varphi(\mathbf{a})) && (\varphi\ \text{は線型写像だから}) \\
&= c\psi(\varphi(\mathbf{a})) && (\psi\ \text{は線型写像だから}) \\
&= c\psi \circ \varphi(\mathbf{a}) && (\text{合成関数の定義から})
\end{aligned}$$

となるからよい． ❑ (補題 4.3)

行列のかけ算の定義は人工的に見えたかもしれないが，この定義は，次の定理が成り立つことを目標に定められていたのだった．代数的には，以下の定理の証明では，行列のかけ算で結合律が成り立つことが，ポイントになっている．

定理 4.4 線型写像の合成は表現行列のかけ算に対応する．より具体的には，$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ を線型写像とするとき，$m \times n$-行列 A と $\ell \times m$-行列 B を $\varphi = \varphi_A$, $\psi = \varphi_B$ となるようにとると[1)]，$\psi \circ \varphi = \varphi_{BA}$ である[2)]．

証明. 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(\mathbf{a}) &= \psi(\varphi(\mathbf{a})) && (\text{合成関数の定義から}) \\
&= \psi(A\mathbf{a}) && (A\ \text{の選び方から}) \\
&= B(A\mathbf{a}) && (B\ \text{の選び方から}) \\
&= (BA)\mathbf{a} && (\text{行列のかけ算は結合律を満たすから}) \\
&= \varphi_{BA}(\mathbf{a})
\end{aligned}$$

---

1) このような A, B がとれることを，定理 4.2 で示したのだった．

2) 行列 A と B のかけ算の結果 BA は $\ell \times n$-行列になることに注意する．

$\mathbf{a}$ は任意だったので，このことから，(補題 4.2 の一意性の証明と同じ議論により) $\psi \circ \varphi = \varphi_{BA}$ がわかる． □ (補題 4.4)

上の定理の応用として，3 次元空間での原点を中心とした回転を考えてみる．

平面上の回転と同様の議論から 3 次元空間での原点を中心とした回転も線形変換になることがわかる．任意の 3 次元空間での原点を中心とした回転は， (a) xy-平面上の原点を中心とした角度 θ の回転，に続けて (b) yz 平面上での原点を中心とした角度 η の回転，を施し，更に (c) zx-平面上の原点を中心とした角度 θ の回転，を施す，という操作に分解できる．

(a),(b), (c) の表現行列はそれぞれ，$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\eta & -\sin\eta \\ 0 & \sin\eta & \cos\eta \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\zeta & 0 & \sin\zeta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\zeta & 0 & \cos\zeta \end{bmatrix}$ となるから，回転の表現行列は，この二つをかけたものになる (演習: かけ算の結果を求めてください)．