

行列の値 (determinant)

2x2 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ に対し

A の行列式 ($|A|$, $\det(A)$, $\det |A|$)
 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ と表すことも可

は $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ のこと。

A の成分が $\mathbb{R}$ の要素ならば $\det(A) \in \mathbb{R}$

定理 5.1 (1) $c \in \mathbb{R}$ に対し $A = [a_1, a_2]$ に対し $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

(2) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
 $\uparrow$ 2x2 行列の $\uparrow$ 実数の
計算 計算
 $a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ と表すことも可
 $c \det A = \det([c a_1, a_2])$
 $= \det([a_1, c a_2])$

(3) $\det({}^t A) = \det(A)$

証明 (1):

$$\begin{aligned} \det([c a_1, a_2]) &= \begin{vmatrix} c a_{11} & a_{12} \\ c a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = c a_{11} a_{22} - c a_{21} a_{12} \\ &= c (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) \\ &= c \det(A) \end{aligned}$$

$$\det([a_{11} \ a_{12}]) = \dots = \det(A)$$

同様

(2): $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ とし計算して

算式を示せばよい. 計算は省略

(3): $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると ${}^t A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

さらに $\det({}^t A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
 $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
 $= \det(A).$

R_θ : 左回り角度 θ の回転を表す行列

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

をあらわしたのだ.

定理 5.2 (1) $A = [a_1 \ a_2]$ に対し a_1, a_2 は 2 次元の基底とすると, $R_\theta A = [R_\theta a_1 \ R_\theta a_2]$ である.

(2) $\det(R_\theta) = 1$

(3) $\det([a_1 \ a_2]) = \det([R_\theta a_1 \ R_\theta a_2])$

証明 (1): $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ $a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ とする.

$$R_\theta A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta a_{11} - \sin \theta a_{21} & \cos \theta a_{12} - \sin \theta a_{22} \\ \sin \theta a_{11} + \cos \theta a_{21} & \sin \theta a_{12} + \cos \theta a_{22} \end{bmatrix}$$

$R_\theta a_1$ $R_\theta a_2$

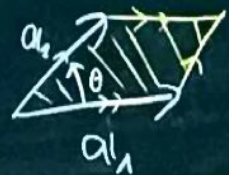
(2):

$$\det(R_\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

(3): $\det([R_\theta a_1 \ R_\theta a_2]) \stackrel{(1)}{=} \det(R_\theta [a_1 \ a_2])$

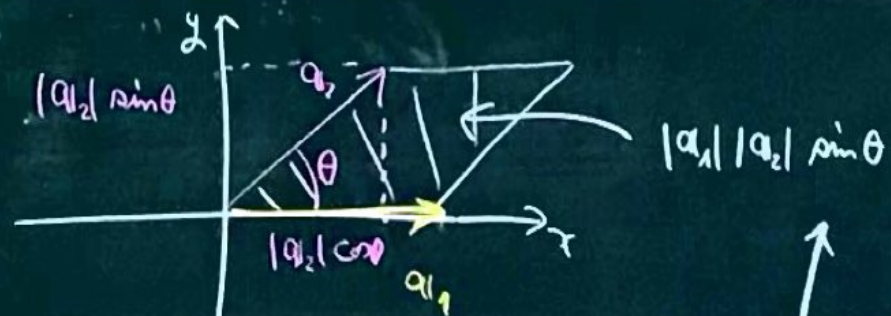
$$\stackrel{\text{定理 5.1(2)}}{=} \det(R_\theta) \det([a_1 \ a_2]) \stackrel{(2)}{=} \det([a_1 \ a_2]) \quad \square$$

定理 5.3 $A = [a_1 \ a_2]$ を 2×2 行列とすると,
 a_1 と a_2 を 平面上の原点を始点とく平面ベクトルと見て,
 a_1 から a_2 までの角を (左回り) θ とする) このとき



$\det(A)$ は ベクトル $a_1 \ a_2$ のはさ
 平行四辺形の面積とある。ただし
 a_2 が a_1 の右回り方向にあるときには、
 面積は 2 つの値をとりうる。

証明 定理 5.2 (3) から $a_1 \ a_2$ を回転して a_1 は平面の
 x 軸方向を向くようにする。



$$a_2 = \begin{bmatrix} |a_2| \cos \theta \\ |a_2| \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} |a_1| \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det([a_1 \ a_2]) = \begin{vmatrix} |a_1| & |a_2| \cos \theta \\ 0 & |a_2| \sin \theta \end{vmatrix} = |a_1| |a_2| \sin \theta$$

□

系 5.4 (1) a_1 と a_2 が直交するとき、

$$|\det([a_1 \ a_2])| = |a_1| |a_2| \quad \text{と成る。}$$

(2) a_2 が a_1 のスカラー倍のとき、

$$\det([a_1 \ a_2]) = 0$$

□

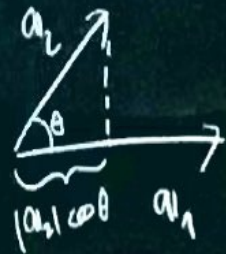
命題 5.5 ベクトル a_1, a_2 に対し

(1) a_2 が a_1 のスカラー倍のとき、

$$|a_1 - a_2| = |a_1| |a_2|$$

(2) a_1 と a_2 が直交するとき、

$$a_1 \cdot a_2 = 0$$



$$a_1 \cdot a_2 = |a_1| |a_2| \cos \theta$$

行列の値 (determinant)

3x3 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (3x3)

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} \overset{1}{\square} & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} \overset{1}{\square} & \overset{2}{\square} & \square \\ a_{21} & \square & a_{23} \\ a_{31} & \square & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} \overset{1}{\square} & \square & \overset{3}{\square} \\ a_{21} & a_{22} & \square \\ a_{31} & a_{32} & \square \end{vmatrix}$$

2x2 行列の行列式

$\det([a]) = a$

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} \square & \square \\ a_{21} & \square \end{vmatrix}$$

4x4 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

行列

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \square & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \square & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} \square & \square & \square & \square \\ a_{21} & \square & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \square & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \square & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} \square & \square & \square & \square \\ a_{21} & a_{22} & \square & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \square & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \square & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} \square & \square & \square & \square \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \square \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \square \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \square \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

3x3 行列 に対しては

サラスの計算法で行列式を計算できる。

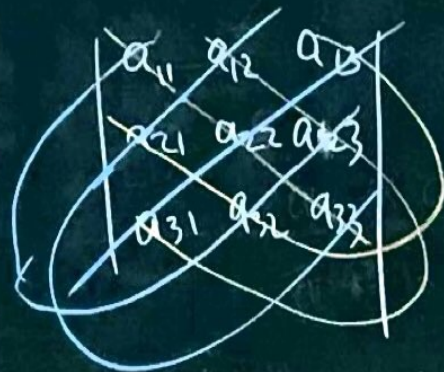
Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (= \text{行列})$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array}$$

$$\det A = \underline{a_{11} a_{22} a_{33}} + \underline{a_{12} a_{23} a_{31}} + \underline{a_{13} a_{21} a_{32}} - (\underline{a_{13} a_{22} a_{31}} + \underline{a_{11} a_{23} a_{32}} + \underline{a_{12} a_{21} a_{33}})$$

↑ 正負が"1"



定理 5.1 は一般の $n \times n$ 行列の行列式に対して成り立つ。

定理 5.6 3×3 行列 A は 3次元空間に

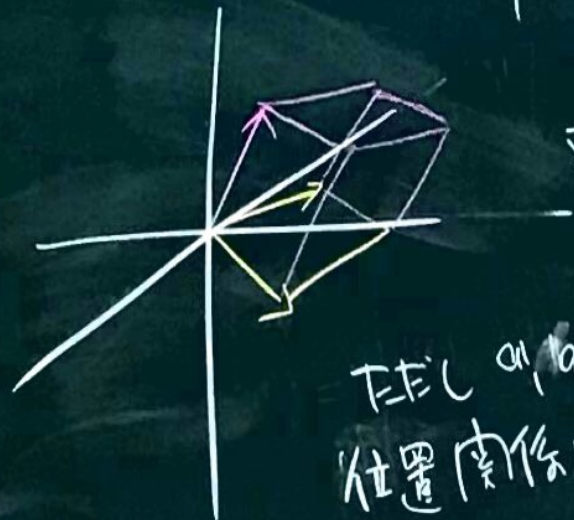
$A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ とあらわしたとき

$|\det(A)|$ は

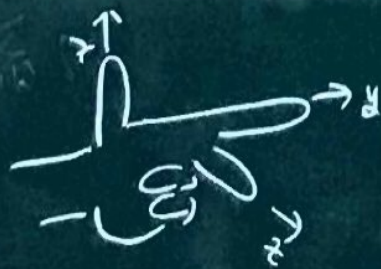
$a_1 \ a_2 \ a_3$ の 3つの

平行六面体の体積と

一致する



ただし a_1, a_2, a_3 が左系の
位置関係にあるとき



のときにはプラス 反対向きときはマイナスの値
となる。