

連立一次方程式の例による

解法

(複数)

変数の定数値(未知数)を正しあわせたいものを定数値を2とおいた形の方程式を一次方程式(線形方程式)という。

例 linear equation

$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + \sqrt{5}x_4 = 7$$

$$x_1 + \bigcirc 2x_3 - x_4 = -2$$

Diagram showing the transformation of the equation $3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + \sqrt{5}x_4 = 7$ into $x_1 + \bigcirc 2x_3 - x_4 = -2$. The transformation involves subtracting $2x_3$ (indicated by $+(-2)x_3$) and adding x_4 (indicated by $+(-1)x_4$). The coefficient of x_2 is $0 \cdot x_2$.

一次方程式をいくつか集めたものを連立方程式という。
a system of equations
linear

例

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + \sqrt{5}x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

方程式の解とは、変数の個数と同じ個数の数の組みで、これらの変数代入すると与の方程式が成り立つようなもののことを言う。

たとえば 一次方程式

$$(*) x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3$$

(について, 数の組 $1, 2, \frac{2}{3}$ はこの方程式の解である ($1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 5 - 2 = 3$)

このとき, $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = \frac{2}{3}$ はこの方程式の解であるとも言う. この例では方程式の解は無数にある

任意の数 a, b について $x_1 = a$ $x_2 = b$ とするとき

$$x_3 = \frac{1}{3}(a + 2b - 3) \text{ とすると, 今度は方程式 } (*) \text{ の}$$

解になっている.

$$a + 2b - 3x_3 = 3 \text{ を整理して}$$

$$a + 2b - 3 = 3x_3 \text{ 両辺を } 3 \text{ で割る}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(a + 2b - 3)$$

連立方程式のすべての方程式の解となっている
ある数の組のことをこの連立方程式の解という.

連立方程式の解は①一つに決まる場合, ②無限にある場合, ③解が一つもない場合, がある.

例

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \text{ は解をもたない.}$$

連立方程式の行列表現

アラビア数字の七

例

$$(*) \begin{cases} 3x + y - 7z = 0 \\ 4x - y - z = 5 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

7 7 7

日本
イギリス
北米

を解くと、この連立方程式の左辺にあらわす
係数をとり、2/1/1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

を共2.

Aを(*)の係数行列とし.

変数 x, y, z を列ベクトル $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とまとめ

方程式の右辺を列ベクトル $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ とまとめると

方程式(*)は $Ax = b$

とあらわせる. この方程式の解は $a = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ で

$Aa = b$ とおきかえてあらわせる.

A は方程式の右辺の定数項を収めてなる
行列

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

を連立方程式の 拡大係数行列 という。

連立方程式 S_1, S_2 が 同値 であるとは、 S_1 の解の全体と
 S_2 の解の全体が一致することをいう

連立方程式を解く (連立方程式の解の全体を
求める)

(= は、 S を S と同値な連立方程式でその解の
全体が何かはすぐに求まるものに変形すれば
よい。

例 $(*)$ の解が何かはすぐには見えないうが

二つと同値な

からはすぐに解が求まる

$(*)$ のただけ
の解である
= かつ
わかる

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 & ① \\ y - 3z = -1 & ② \\ -z = -2 & ③ \end{cases}$$

③ から $z = 2$
② から $y - 3 \cdot 2 = -1$ (よって $y = 5$)
① から $x - 5 + 2 \cdot 2 = 2$ より $x = 3$

よって $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ が

連立方程式の同値な方程式Aの变形
上の(*)を解く

(*) の1行と3行を交換

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 4x - y - z = 5 \\ 3x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{2} + (-4) \times \textcircled{1} \\ \textcircled{3} + (-3) \times \textcircled{1} \end{array}$$

この連立方程式の1番目の方程式の
-4倍を2番目の方程式に足し
-3倍を3番目の方程式に足す

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 0x + 3y - 9z = -3 \\ 0x + 4y - 13z = -6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -9 & -3 \\ 0 & 4 & -13 & -6 \end{array} \right] \textcircled{2} \times \frac{1}{3}$$

この連立方程式の2番目の式の
両辺を3で割る

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - 3z = -1 \\ 4y - 13z = -6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -13 & -6 \end{array} \right] \textcircled{3} + (-4) \times \textcircled{2}$$

この連立方程式の2番目の式の
-4倍を3番目の式に足す

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - 3z = -1 \\ 0y - z = -2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & -2 \end{array} \right]$$

拡大係数行列の基本変形

(行に関する)

- 拡大係数行列の2つの行を入れかえる
- 拡大係数行列の*ある*行の定数倍を他の行に加える
- 拡大係数行列の*ある*行を 0でない 定数で定数倍する

echelon form

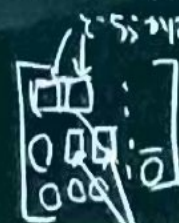
上の3つの操作をうまく組み合わせることで階段形の拡大係数行列に変形することで連立を解きやすくなる

Gaussの解法

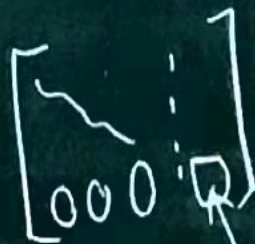
階段形, の3つのパターン: (3変数の場合)



① 解は1点に決まる



② 解は無数個存在する



③ 解は存在しない

$$0x + 0y + 0z = 1$$