

例) 連立方程式の幾何学的な意味づけ

$$(*) \begin{cases} 3x + y - 7z = 0 \\ 4x - y - z = 5 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

(*) 一番目の式は

$$0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3x + y - 7z$$

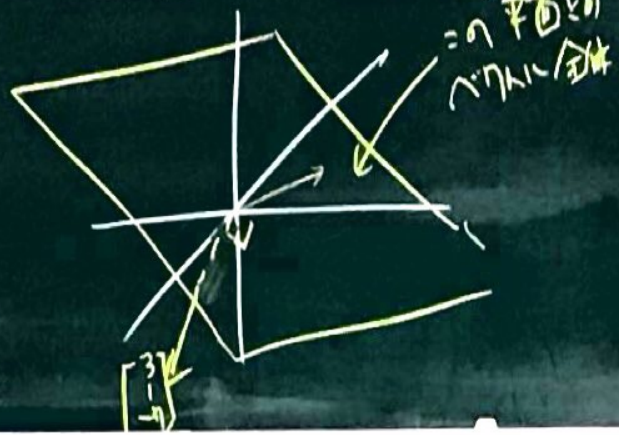
↑ 内積

2つのベクトルの内積 = 0
 $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

(=) a と b は直交する。ここで T_1

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 7z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$$



$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \text{ に対して } 4a_0 - b_0 - c_0 = 5 \text{ かつ } \text{Tr} \text{ かつ } \text{Tr}$$

$$\wedge \text{ かつ } \text{Tr} \text{ かつ } \text{Tr}, \quad 4x - y - z = 5 \text{ かつ } \text{Tr}$$

$$\text{すなわち } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \text{ かつ } \text{Tr}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{すなわち } \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \text{ に対して } \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = 0 \text{ かつ } \text{Tr}$$

$$\text{Tr}(b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}}_{=5}$$

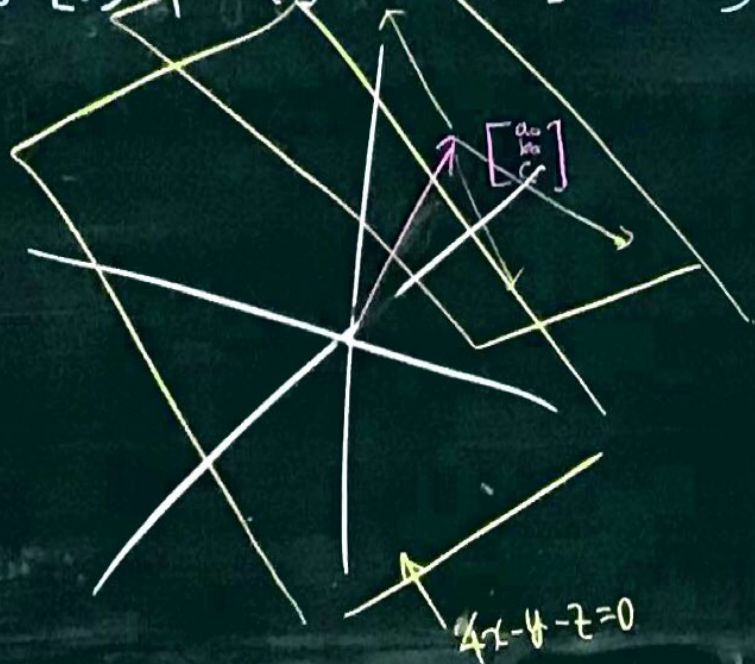
$$\text{すなわち } \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \text{ は } 4x - y - z = 5 \text{ の解に属する}$$

すなわち

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y - z = 5 \right\} = \text{Tr}$$

$$(*) = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ は方程式 } 4x - y - z = 0 \text{ の解} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ベクトル } \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ と直交する} \right\}$$



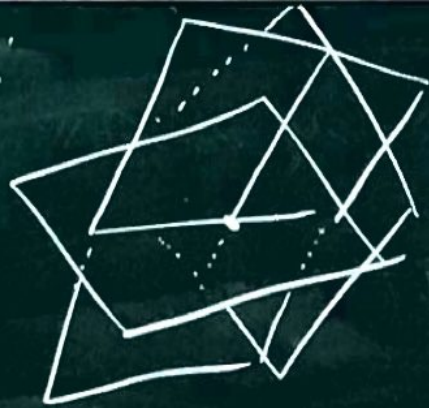
3変数の1つの方程式は、平面上の点に対応するベクトルの全体となる。
(必ず)

(特に、方程式の右辺(定数項)が0のときには対応する平面は原点を通るものになっている。)
そうでないものについては、右辺を0と置いて方程式の解に対応する原点を通る平面を、方程式の解となっている1つのベクトルで平行移動したものにしている。

3変数の連立方程式では、1つ1つの式の解の全体は $\mathbb{R}^3$ の平面上の点に対応するベクトルの全体になる。
ところで、連立方程式の解は、これらの平面の共通部分の点に対応するベクトルの全体になる。

めくらは

①



ちょうど1点

②



直線上の点の全体

おなじ方向に同じ平面に
対応しているところ
共通部分は平面になる。

③



共通部分なし

(連立方程式は
解を持たない)



$$(*) \begin{cases} 3x + y - 7z = 0 \\ 4x - y - z = 5 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

拡大係数行列

のがう入の消去法による解法

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

この拡大係数行列にこの基本変換を
適当にほとして階段形の行列を得る。
この行列に対応する連立方程式は元の
連立方程式と同値になるが階段形の
連立方程式は簡単にとける。

この例では、得られる階段形の行列は、

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$



$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - 3z = -1 \\ -z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= 2 \\ y - 3 \cdot 2 &= -1 \\ \Rightarrow y &= 5 \\ x - 5 + 2 \cdot 2 &= 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

基本変形:

- 1行を入れかえる.
- ある行に他の行の定数倍を加える.
- ある行を0にする定数で定数倍する.

(*) の行列とベクトルによる表現

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{と} \quad \text{して}$$

係数行列

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{と} \quad \text{して}$$

(*) は $Ax = b$ と表現できる.

定理 7.1

今、一般に n 変数の連立方程式が $m \times n$ 行列 A と m 次元ベクトル b により

$$Ax = b$$

と表わすことができる ただし $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とする.

$$E_n = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right\}_n$$

よって B を $m \times n$ 行列で逆行列を持つものとする

$$CB = BC = E_n$$

逆行列の存在は

↑ このとき C を B^{-1} とする
(これは 1 変数に決まる)

$Ax=b$ と $BAx=Bb$ は同値である

証明 $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ を $Ax=b$ の解とすると

$$BAc = Bb \quad \text{とすると } c \text{ は } BAx=Bb$$

の解である。よって c は $BAx=Bb$ の解である。
つまり $BAc=Bb$ である。ゆえに両辺に B^{-1} を左掛

$$\text{かけると } B^{-1}BAc = B^{-1}Bb = b$$

$$Ac \stackrel{=}{{E}_n} \stackrel{=}{{E}_n} b$$

ゆえに c は $Ax=b$ の解である。

□

基本変形は次の基本行列を T_{ij} にかけることに
対応する：
↑ 逆行列を
掛ける

この行と j 行の λ かけ

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$T_{ij} T_{ji} = E_n$$

$$T_{ji} T_{ij} = E_n$$

i 行に j 行の c 倍を加える

$c < 0$ とする

$$L_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \delta & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i + cc_j \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$L_{ij}(c) L_{ij}(-c) = E_n$$

$$L_{ij}(-c) L_{ij}(c) = E_n$$

c 行を c 倍する $c \neq 0$

$$D_c(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ cc_i \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$D_c(c) D_c\left(\frac{1}{c}\right) = E_n$$

$$D_c\left(\frac{1}{c}\right) D_c(c) = E_n$$

以上より、拡大係数行列の基本変形による変形で
 その連立方程式と同等な連立方程式に対応する拡大
 係数行列が得られることがわかった。