線形代数 1 — 2020年06月18日の講義

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

(2020 年 07 月 02 日 10:06 版)

以下は，2020 年 06 月 18 日に実施の線形代数 1 のオンライン講義 (第 1 quarter 7 回目) です．前回までで扱った連立一次方程式に関する事項のまとめが主な内容となっています．このテキストの内容は主に教科書の 第 2 章 「連立 1 次方程式」 に対応しますが，教科書ではあまり強調されていない，いくつかの事項については，教科書とは違う記述の仕方で述べてあります．

以下のような**連立一次方程式** (system of linear equations) を考える [1]．

$$
(7.1)\qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \qquad \vdots & \ \ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}
$$ 7-0

ここに，$a_{i,j}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$, b_i $(1 \leq i \leq m)$ は定数で，x_j $(1 \leq j \leq n)$ は変数記号である．x_j $(1 \leq j \leq n)$ は，この形の記号である必要はなく，(例えば x, y, z,... などの) 他の記号でもよい．

$\mathcal{S}$ を，変数 $x_1,\ldots, s_n$ を持つ連立一次方程式 (7.1) として，$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ が $\mathcal{S}$ の**解** (solution) である [2]，とは，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ として，(7.1) の各等式に $x_1 = a_2$, $x_2 = a_2,\ldots, x_n = a_n$ と代入したとき，(7.1) のすべての等式が成り立つことである．

以下で見るように，連立方程式の解の全体 (solution set) は，ただ 1 つの解からなる場合，無限個の解からなる場合，空集合の (解が 1 つもない) 場合がありえる．連立一次方程式 $\mathcal{S}$ の

---

[1] 以下では，連立一次方程式の一般論で，連立一次方程式を，$\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$,... などと表わしているが，ここで文字 S を選択したのは，この “$\underline{\text{s}}$ystem of linear equations” という，もとの名称の頭文字にちなむ．

[2] $\mathbb{R}^n = \{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ だった．

解の全体を表わすスタンダードな記法はないようだが，以下では $\mathcal{S}$ の解の全体を $S(\mathcal{S})$ と表わすことにする．

$$S(\mathcal{S}) = \{\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbb{a} \text{ は連立一次方程式 } \mathcal{S} \text{ の解}\} \tag{7.2}$$ 7-0-0

である．

連立一次方程式 $\mathcal{S}$ を**解く** (solve) とは，集合 $S(\mathcal{S})$ (または $S(\mathcal{S})$ の各要素) を求めることである．

(7.1) のような連立一次方程式に対し，行列 A とベクトル $\mathbb{b}$ を，

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1,} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1,} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1,} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{7.3}$$ 7-1

として，A を連立一次方程式 (7.1) の**係数行列**とよぶ．また，行列

$$\tilde{A} = [A \,\vdots\, \mathbb{b}] = \begin{bmatrix} a_{1,1,} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & \vdots & b_1 \\ a_{2,1,} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1,} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & \vdots & b_m \end{bmatrix} \tag{7.4}$$ 7-2

を，連立一次方程式 (7.1) の**拡大係数行列**と呼ぶ．A と $\mathbb{b}$ の間にある "$\vdots$" は単に可読性を増すため，と，この行列を拡大係数行列として捉えていることを強調するために，便宜上書かれているものにすぎない．

連立一次方程式 $\mathcal{S}$ の拡大係数行列が A のとき，$\mathcal{S}$ の解の解の全体 $S(\mathcal{S})$ を $S(A)$ ともあらわすことにする．

変数記号 x_j $(1 \leq j \leq n)$ を縦に並べて，n-次元縦ベクトルをあらわす１つの変数

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{7.5}$$ 7-3

と思うことにすると，連立方程式 (7.1) は，ベクトルに関する方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ と考えることができる．$m \times n$-行列 A は，線型写像

$$\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ \mathbb{a} \mapsto A\mathbb{a} \tag{7.6}$$ 7-4

と対応づけることができるのだったから，連立方程式 (7.1) は，$\varphi_A(\mathbb{x}) = \mathbb{b}$ という方程式と解釈することもできる．この方程式は，

線型写像 $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ でベクトル $\mathbb{b}$ $(\in \mathbb{R}^m)$ にうつされるようなベクトル $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^m$ の全体が何になるかを調べよ

という問題として理解できる．

2 つの連立方程式 $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ は,

$\mathcal{S}_0$ の解の全体 $=$ $\mathcal{S}_1$ の解の全体

が成り立つとき**同値である**，という．たとえば，教科書の例題 2.1.1 の連立方程式

$$
(7.7) \quad \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +3y & -z = & -3 \\ -x & +2y & +2z = & 1 \\ x & +y & -z = & -2 \end{array} \right.
$$
7-5

は，連立方程式,

$$
(7.8) \quad \left\{ \begin{array}{lllr} x & & = & 1 \\ & y & = & -1 \\ & & z = & 2 \end{array} \right.
$$
7-6

と同値である．(7.7) と (7.8) の拡大係数行列は，それぞれ,

$$
(7.7)' \quad \left[\begin{array}{rrr:r} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]
$$

$$
(7.8)' \quad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]
$$

だが，このとき拡大係数行列 $(7.7)'$ と $(7.8)'$ も同値である，ということにする．

(7.7) では，この連立方程式の解の全体が何になるかは見ただけではすぐに分らないが，(7.8) はその解の全体が，$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \}$ となること，つまり，$x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ が唯一の解となることが即座に読み取れる．

前回と前々回の講義で述べた，**ガウスの消去法** (教科書では「**ガウスの掃き出し法**」とよばれている) は，連立方程式 (あるいはそれに対応する拡大係数行列) を同値な連立方程式 (あるいはそれに対応する拡大係数行列) に変形してゆき，(7.8) のような (あるいはこれに対応する $(7.8)'$ のような)， 解が何になっているかが即座に読み取れる形の (元の連立方程式と同値な) 連立方程式 (あるいはそれに対応する拡大係数行列) を得るための方法となっている．このことのきちんとした説明を以下で与える．

$n \times n$ 行列 B が **正則**である (**可逆** (invertible) であるということも多い) とは，$n \times n$ 行列 C で，$BC = CB = E_n$ となるようなものが存在することである．ここで E_n は n-次の単位行列である．行列のかけ算は一般には可換ではない (順序を入れ替えると計算結果が変ることがある) ので，BC と CB は異る可能性があり，$BC = CB = E_n$ という条件は $BC = E_n$ あるいは $CB = E_n$ で単純に置き換えられない．実は，後で (「線形代数 3」 か 「線形代数 4」)， $BC = E_n$ となる C が存在する，あるいは $CB = E_n$ となる C が存在することだけから B が正則であることが導けることが示されるが，このことの証明はそんなに簡単ではない[3]．$BC = CB = E_n$ となるような行列 C は B の**逆行列**であるという．

P-7-0

補題 7.1 $n \times n$-行列 B の逆行列が存在するなら，それは一意である．つまり，$n \times n$-行列 C, C' が $BC = CB = E_n$, $BC' = C'B = E_n$ を満たすなら，$C = C'$ である．

証明． $BC = CB = E_n$, $BC' = C'B = E_n$ が成り立つとすると，$C = CE_n = C(BC') = (CB)C' = E_nC' = C'$ となるから，$C = C'$ である． □ (補題 7.1)

補題 7.1 により，$n \times n$ 行列 B の逆行列は存在するなら一意だから，それを B^{-1} とあらわすことにする．逆行列の簡単な性質を見ておくことにする．

P-7-1

補題 7.2 $n \times n$-行列 B, C が共に正則なら，BC も正則で，$(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ である (かけ算の順序に注意).

証明． 行列のかけ算の結合律と，単位行列の性質から，$(BC)(C^{-1}B^{-1}) = B(CC^{-1})B^{-1} = BE_nB^{-1} = BB^{-1} = E_n$ で， $(C^{-1}B^{-1})(BC) = C^{-1}(B^{-1}B)C = C^{-1}E_nC = C^{-1}C = E_n$ である． □ (補題 7.2)

P-7-1-0

例 7.1 (1) $n \times n$-行列 B が正則なら，B^{-1} も正則で，B^{-1} の逆行列は B である．

(2) $E_nE_n = E_n$ だから，$(E_n)^{-1} = E_n$ である．

(3) O_n ($n \times n$ のゼロ行列) にどんな $n \times n$-行列をかけても結果は O_n だから，O_n は正則ではない．

(4) 上の (3) と補題 7.2 により，すべての冪零行列 (ある $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ に対し $B^k = O_n$ となるような行列) は正則でない．

(5) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると，$BB = B$ だから，B は冪零ではないが，任意の行列 $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し，$BC = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから，B は正則でない．

[3] 科書では，このことは，p.57 で行列式を用いて証明しているので,「線形代数 2」の範囲で証明することになるかもしれませんが，この事実の自然な証明は「次元定理」と呼ばれる，多分「線形代数 3」で説明されることになる定理を用いるものです．

(5)　$B = [b_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$ を対角行列とする．つまりすべての $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$ に対し，$b_{i,j} = 0$ となるようなものとする．このとき，B が正則となるのは，すべての $1 \le i \le n$ に対して $b_{i,i} \ne 0$ となるちょうどそのときで，このときには，B^{-1} は $(b_{i,i})^{-1}$ $(1 \le i \le n)$ を対角成分とする対角行列である．　❏

逆行列の連立方程式の解法と関連は，次の命題で見ることができる．

P-7-2

命題 7.3 A と $\mathbb{b}$ を (7.3) でのようなものとするとき，$n \times n$ 行列 B が正則なら，連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ と連立方程式 $(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ は同値である．このとき，連立方程式 $(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ の拡大係数行列は $B\tilde{A}$ である．

証明． 任意の $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ について, $\mathbb{a}$ が方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解になることと, 連立方程式 $(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ の解になることが同値であることを示せばよい．もし $\mathbb{a}$ が $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解になっているとすると，$A\mathbb{a} = \mathbb{b}$ だから，この両辺に左から B をかけると，$(BA)\mathbb{a} = B\mathbb{b}$ である．したがって，$\mathbb{a}$ は $(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ の解である．逆に，$\mathbb{a}$ が $(BA)\mathbb{x} = B\mathbb{b}$ の解になっているとすると，$(BA)\mathbb{a} = B\mathbb{b}$ だから，この両辺に B^{-1} を左からかけると，$A\mathbb{a} = (B^{-1}B)A\mathbb{a} = B^{-1}(BA)\mathbb{a} = B^{-1}B\mathbb{b} = \mathbb{b}$ となり，$\mathbb{a}$ は $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解であることがわかる．

$B\tilde{A} = B[A \,\vdots\, \mathbb{b}] = [BA \,\vdots\, B\mathbb{b}]$ だから，$B\tilde{A}$ が連立方程式 $(BA)\mathbb{a} = B\mathbb{b}$ の拡大係数行列であることがわかる．　❏ (命題 7.3)

P-7-3

例 7.2 (7.1), (7.3) でのような任意の連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ に対し，O_n を両辺の左からかけると，$O_n\mathbb{x} = \mathbb{0}$ という形の連立方程式が得られるが，すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ はこの方程式を満たすから，もとの方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ がそのようなものでなければ，この方程式とそれの両辺に O_n をかけたものは同値でない．例 7.1, (3) でも見たように O_n は正則でないことに注意する (命題 7.3 により，上で述べたことも O_n が正則でないことの少し大回りをした証明になっている)．　❏

(拡大係数) 行列の行に関する基本変形は，次の 3 つのタイプの操作のことである:

(1*)　1 つの行を定数倍する (ただし倍率の定数は 0 以外の実数とする),

(2*)　2 つの行を入れ替える,

(3*)　１つの行に他の行の定数倍を加える．

これらの操作は，対応する連立方程式に次のような変形を行なうことに対応している (教科書の p.19):

(1)　方程式の 1 つを定数倍する (ただし倍率の定数は 0 以外の実数とする),

(2)　2 つの方程式を入れ替える,

(3)　１つの方程式に他の方程式の定数倍を加える．

これらの3つの操作は，それぞれに対応する正則な行列を拡大係数行列に左からかけることで実現できる (「正則な行列を拡大係数行列に左からかける」ことの意味については，命題7.3を参照).

(1†) 拡大係数行列の k-行を c 倍する $(c \neq 0)$ 操作は，以下のような $m \times m$-サイズの対角行列 $S_k^m(c)$ を拡大係数行列に左からかけることで実行できる

$$S_k^m(c) = \begin{array}{@{}c@{}l} \left[\begin{array}{cccccc} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& c && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \quad k \text{ 行目} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(2†) 拡大係数行列の k-行と ℓ-行を入れ替える操作は次のような $m \times m$ サイズの行列 $T_{k,\ell}^m$ を拡大係数行列に左からかけることで実行できる.

$$T_{k,\ell}^m = \begin{array}{@{}c@{}l} \left[\begin{array}{cccccc} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 0 && 1 & \\ &&& \ddots && \\ && 1 && 0 & \\ &&&&& \ddots \\ &&&&& 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \quad k \text{ 行目} \\ \\ \leftarrow \quad \ell \text{ 行目} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(3†) 拡大係数行列の k-行目に ℓ-行目の d 倍を加える操作は次のような $m \times m$ サイズの行列 $R_{k,\ell}^m(d)$ を拡大係数行列に左からかけることで実行できる.

$$R_{k,\ell}^m(d) = \begin{array}{@{}c@{}l} \left[\begin{array}{cccccc} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& 1 & d & \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \quad k \text{ 行目} \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad \uparrow \ell \text{ 列目} & \end{array}$$

P-7-4

補題 7.4 上の $S_k^m(c)$, $T_{k,\ell}^m$, $R_{k,\ell}^m(d)$ のタイプの行列はすべて正則行列である．したがって，$S_k^m(c)$, $T_{k,\ell}^m$, $R_{k,\ell}^m(d)$ のタイプ行列の任意の積として表される $m \times m$-行列はすべて正則行列である.

証明． $(S^m_k(c))^{-1} = S^m_k(c^{-1})$ である (例 7.1, (5) を参照． $c \neq 0$ だったことに注意する)．

$(T^m_{k,\ell})^{-1} = T^m_{k,\ell}$ である (直観: 入れ替えたものをもう一度入れ替えると元にもどる)．

$(R^m_{k,\ell}(d))^{-1} = R^m_{k,\ell}(-d)$ である (直観: ℓ 行の d 倍を足したあとで ℓ 行の d 倍をひくと元にもどる)．

以上の議論から，$S^m_k(c)$, $T^m_{k,\ell}$, $R^m_{k,\ell}(d)$ のタイプの行列はすべて正則であることがわかる．

主張の後半は，このことと補題 7.2 から導かれる． ❑ (補題 7.4)

次の定理のために，もう１つ，“あたりまえ” と思われるかもしれない事実を指摘しておきたい．それは，連立一次方程式の間の同値性が推移的である，という事実である．つまり，任意の連立一次方程式 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ について，$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ が同値で，$\mathcal{S}_2$ と $\mathcal{S}_3$ が同値なら，このことから，$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_3$ が同値であることが導かれる．これは，連立一次方程式の同値性が解の全体の集合の同等性により定義されていたことと，同等性が推移的であることから成り立っている事実である．

このことと，命題 7.3 および補題 7.4 により，以下の定理が直ちに導かれる:

P-7-5

定理 7.5 $\mathcal{S}$ を連立一次方程式として，$\mathcal{S}'$ を，$\mathcal{S}$ の拡大係数行列に基本変形を複数回施して [4] 得られる行列を拡大係数行列として持つような連立一次方程式とすると，$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ は同値である． ❑

以上から，連立方程式 $\mathcal{S}$ の解き方として，$\mathcal{S}$ の拡大係数行列に基本変形を複数回施して得られる，(7.7)$'$ に対する (7.8)$'$ のような，適当な [5] 形をした拡大係数行列を得て，それに対応する連立一次方程式の解を求める，という方法が考えられる．このような連立一次方程式の解法は，この方法を発案した数学者ガウス (Johann Carl Friedrich Gauß 1777 (安永 6 年) — 1855 (安政 2 年)) にちなんで，ガウスの消去法と呼ばれている (Gaussean elimination, 教科書では「ガウスの掃き出し法」という言い方をしている)．

ここで「適当な」拡大係数行列と言ったのは，**簡約な行階段形** (reduced row echelon form) と呼ばれる形をしているもののことである (教科書では p.23 で「簡約な行列」とよばれている)．

行列 $A = [a_{i,j}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ に対し，A の i-行の**主成分** (leading entry — pivot (軸) と呼ばれることも多い) とは，$1 \leq j \leq n$ で，$a_{i,j} \neq 0$ だが，すべての $1 \leq k < j$ に対し，$a_{i,k} = 0$ となるようなもののことである．そのような j に対する $a_{i,j}$ のことも主成分ということにする．各 $1 \leq i \leq m$ に対し，A の i-行が主成分を持つときには，それは一意である．A の i-行が主成分を持たない，というのは，A の i-行の成分がすべて 0 である，ということである．

---

[4] ここで複数回と言っているのは，0 回や 1 回の場合も含めている．ただし，基本変形を 0 回施すとは，何もしないことである．

[5] 日本語の「適当」は arbitrary と appropriate の 2 つの意味があるが，ここでの適当は後者である．

行列 $A=[a_{i,j}]_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ が**行階段形**[6] (echelon form) である，とは次が成り立つことである．

(7.9)　A の主成分を持たない行は，どの主成分を持つ行より下ある． 7-7

(7.10)　A の i 行目が主成分を持つとき, この主成分を j_i とあらわすことにすると, $j_1<j_2<\cdots$ となる． 7-8

「階段形」という名前の由来は，主成分を持つ行の主成分が右下がりの階段状にならぶことからきている．行列 A が**簡約な行階段形**[7] であるとは，A は行階段形で,

(7.11)　A の i 行目が主成分 j_i を持つとき，$a_{i,j_i}=1$ で，すべての $1\le k\le m$, $k\ne j_i$ に対し，$a_{i,k}=0$ である 7-9

を満たすこととする．

P-7-6

例 7.3 (1) 拡大係数行列

$$A=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1&0&1&0&2&4\\ 0&1&2&0&3&-3\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

は簡約な階段形である．この拡大係数行列は，連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = & 4\\ & x_2 & +2x_3 & & +3x_5 & = & -3\\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

に対応する．この連立方程式は解を持たない．連立方程式の最後の方程式では，$x_1,\dots,x_5$ にどんな値を代入しても左辺は 0 になり右辺の 1 とは等しくならないからである．

(2) 拡大係数行列

$$A=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1&0&1&0&2&4\\ 0&1&2&0&3&-3\\ 0&0&0&1&2&1 \end{array}\right]$$

は簡約な階段形である．この拡大係数行列は，連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & +x_3 & +x_5 & = & 4\\ & x_2 & +2x_3 & +3x_5 & = & -3\\ & & x_4 & +2x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

[6] 列階段形も同様に，定義できるが，ここでは列階段形は扱わないので，簡単のため以降単に「階段形」ということにする．

[7] 1 つ前の脚注でと同様に，以降，単に「簡約な階段形」ということにする．

に対応する．この簡約な階段形の拡大係数行列では，すべての主成分は $\vdots$ の左側にある．この連立方程式は，移項により，主成分に対応する変数について解くことができて，それを実行すると，

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_3 - x_5 \\ x_2 = -3 - 2x_3 - 3x_5 \\ x_4 = 1 - 2x_5 \end{cases}$$

となる．この解では，簡約な階段形になっている拡大係数行列で，軸 (主成分) の現れない列に対応する変数 x_3, x_5 は何の制約も果されていない形になっているから，それらの値をパラメタ s, t で表わすことにすると，解の全体は，

$$S(A) = \{ \begin{bmatrix} 4-s-t \\ -3-2s-3t \\ s \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \}$$

とあらわせる．解でのパラメタ s t と，A の軸 (主成分) の現れない列 (に対応する連立方程式の変数) が対応していることに注意する．

(3) 拡大係数行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

は簡約な階段形である．この拡大係数行列は，連立方程式

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = -1 \end{cases}$$

に対応する．このときには，明らかに $s(A) = \{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \}$ である．

任意の行列は，基本変形の繰り返し適用により，階段形になっている行列に変形することができる．(効率を問題にしなければ) この変形は，比較的簡単なアルゴリズムで機械的に行なうことができる (演習!)．更に階段形になっている行列は，やはり基本変形の繰り返し適用により，簡約な階段形の行列に変形できる (演習!)．更に，ある行列から出発して基本変形の

繰り返し適用により得られる簡約な階段形の行列は一意に決まる (一意性については教科書の p.78 にある定理 4.3.5 で示されている — 証明は講義ではまだ扱っていない 1 次独立性の概念を用いるものになっている[8]).

定理 7.5 により，このようにして得られらた 簡約な階段形の行列に対応する連立一次方程式は，もとの連立一次方程式と同値である．また，得られた簡約な階段形の行列は例 7.3 で見た 3 つのパターンのうちのどれかになっている．これらのことを纏めると次が得られる[9].

P-7-7

定理 7.6 任意の連立方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ に対し，その拡大係数行列 $\tilde{A}=[A \vdots \mathbb{b}]$ に対し，$\tilde{A}$ に行の基本変形を複数回施して，簡約な階段形になっている行列 $\tilde{B}=[B \vdots \mathbb{b}']$ が得られる．$\tilde{A}=[A \vdots \mathbb{b}]$ から $\tilde{B}=[B \vdots \mathbb{b}']$ への変形は，一定のアルゴリズムにより機械的に行なうことができる．この簡約な階段形の $\tilde{B}$ は (基本変形の複数回の施行のやり方によらず) 一意に決まる．

$S(\tilde{A})=S(\tilde{B})$ で，次の 3 つのパターンのどれか (ちょうど１つ) が成り立つ．

(a) $\tilde{B}$ の右端の列 (つまり $\vdots$ の右側) に主成分が現れる場合．このときには，連立方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ は解を持たない．したがって $S(\tilde{A})=\emptyset$ である．このときには， $\tilde{A}$ (または方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$) は**矛盾する** (inconsisent) ということにする．

(b) $\tilde{B}$ の右端の列には主成分が現れないが (つまり $\tilde{B}$ は矛盾しないが)，それ以外の列にも主成分が現れないものがあるとき．この場合には，$\tilde{B}$ の右端の列以外で主成分の表われない列 (このような列を**非軸列** (non-pivotal column) とよぶことにする) の列の番号が $j_1,...j_k$ であるとき，パラメタ $p_{j_1},...,p_{j_k}$ を用いて，$S(\tilde{A})=\{\mathbb{s}(p_{j_1},...,p_{j_k}) : p_{j_1},...p_{j_k}\in\mathbb{R}\}$ と表わせる．ただし，ここで，$\mathbb{s}(p_{j_1},...,p_{j_k})$ は $p_{j_1},...,p_{j_k}$ の一次式を成分として持つ n-次元ベクトルで，特にその j_ℓ-成分 $(1\le\ell\le k)$ は p_{j_ℓ} となっているようなものである．

(c) $\tilde{B}$ の右端の列には主成分が現れないが (つまり $\tilde{B}$ は矛盾しないが)，それ以外のすべての列に主成分が現れる．このときには $m\ge n$ で，$\mathbb{b}'=\begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}$ として，$\mathbb{b}'\restriction n=\begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}$ が連立方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ の唯一の解となる．したがって，$S(\tilde{A})=\{\mathbb{b}'\restriction n\}$ である． ❏

この定理の系 (けい，定理から容易に導ける結論) として，我々が経験的には知っている，多項式に関する多くの事実が導ける．

---

[8] 教科書の証明は，少し舌足らずなので，内容を再現するのが難しいかもしれない．教科書には明示的に述べられていない，次の補題をまず証明してから，これを用いて教科書の 定理 4.3.5 をそこに書いてあるようなアイデアで証明すればよい:

補題． 行列 $[\mathbb{a}_1\mathbb{a}_2...\mathbb{a}_n]$ と $[\mathbb{b}_1\mathbb{b}_2...\mathbb{b}_n]$ が行の基本変形の繰り返しで互いに移りあえるとき，$1<j^*\le n$ と $c_j\in\mathbb{R}$ $(1\le j<j^*)$ に対し，$\sum_{1<j<j^*}c_j\mathbb{a}_j=\mathbb{a}_{j^*} \Leftrightarrow \sum_{1<j<j^*}c_j\mathbb{b}_j=\mathbb{b}_{j^*}$ である．

この証明は，後でこの教材に書き足す予定だが，そのための手書きの証明のスケッチを https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg_Scan_2020-06-30–19.04.pdf に置いてある．

[9] 定理 7.6 の (a), (b), (c) は，それぞれ例 7.3 の (1), (2), (3) に対応するものになっていることに注意する．

系 7.7 $\mathcal{S}$ を (7.1) のような連立一次方程式として，$n > m$ とする．このとき，$\mathcal{S}$ は解を持たない (つまり $\mathcal{S}$ は矛盾する) か，あるいは $\mathcal{S}$ は無限個の解を持つかのいずれかである． P-7-8

証明． $\tilde{B}$ を $\mathcal{S}$ の拡大係数行列 $\tilde{A}$ に基本変形を複数回施すことで得られる，簡約な階段形の行列とする．このとき，$\tilde{B}$ は $m \times (n+1)$-行列である．$\tilde{B}$ が矛盾しないとすると，$\mathcal{S}$ は解を持つが，$\tilde{B}$ は高々 m 個の主成分しか持たないから，$n > m$ により，$1 \leq j \leq n$ で，j がどの行の主成分にもなっていないようなものが存在する．このときには，定理 7.6, (b) の状況が起っているので，$S(\mathcal{S})$ は無限集合になる． ❑ (系 7.7)

補題 7.8 $\mathcal{S}$ を矛盾する連立一次方程式とするとき，$\mathcal{S}$ と同値な連立一次方程式でただ 1 つの一次方程式からなるものが存在する． P-7-8-0

証明． $\mathcal{S}$ が矛盾するとは，$S(\mathcal{S}) = \emptyset$ となることだった．連立一次方程式 $\mathcal{S}'$ を，1 つの式だけからなる，

$$(7.12)\quad \left\{\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1\right.$$

とすると，$S(\mathcal{S}') = \emptyset$ だから (例 7.3, (1) を参照)，$\mathcal{S}'$ と $\mathcal{S}$ は同値である． ❑ (補題 7.8)

系 7.9 $\mathcal{S}$ を変数 $x_1,\ldots,x_n$ $(n > 1)$ を持つ連立一次方程式とする．このとき，$\mathcal{S}$ が唯一の解を持つのは，$\mathcal{S}$ と同値な連立一次方程式がすべて n-個以上の個数の方程式からなるときである． P-7-9

証明． もし $\mathcal{S}$ が矛盾するなら，補題 7.8 により $\mathcal{S}$ は 1 つの論理式だけからなる連立一次方程式と同値である ($1 < n$ に注意)．

$\mathcal{S}$ が矛盾せず，n-個未満の方程式しか持たない連立一次方程式 $\mathcal{S}'$ と同値だとすると，$\mathcal{S}'$ の拡大係数行列 $\tilde{A}'$ に基本変形を複数回施して，$\tilde{A}'$ と同じ縦横サイズの，簡約な階段形の行列 $\tilde{B}'$ が得られる．$\mathcal{S}''$ を $\tilde{B}'$ を拡大係数行列として持つ連立一次方程式とする．$\tilde{B}'$ は高々その行数個 $(< n)$ の主成分しかないから，$\tilde{B}'$ には右端の列以外にも主成分を持たない列を持つ．したがって，定理 7.6, (b) の状況が成立しており，$\mathcal{S}''$ は無限個の解を持つが，$\mathcal{S}''$ は，$\mathcal{S}$ と同値だから，これらの解は $\mathcal{S}$ の解でもある．

次に，$\mathcal{S}$ が n-個未満の方程式しか持たない連立一次方程式のどれとも同値でない，としてみる．このときには，補題 7.8 により，$\mathcal{S}$ は矛盾しない．

$\tilde{A}$ を $\mathcal{S}$ の拡大係数行列として，$\tilde{B}$ を基本変形の繰り返しにより $\tilde{A}$ から得られる簡約な階段形の行列とする．このとき，$\tilde{B}$ の上から数えて n 個の行はすべて主成分を持つ．もしそうでなければ，$\tilde{B}$ と $\tilde{B}$ から主成分を持たない行をすべて取り去って得られる行列は同値だから，$\mathcal{S}$ と同値な方程式を n 個未満しか持たないような連立一次方程式が得られることになり矛盾である．したがって，$\tilde{B}$ は n 個の主成分を持つ行と 0 のみを持つようないくつかの行からな

る行列となっている[10]．したがって，定理 7.6, (c) の状況が成立しており， $\tilde{B}$ に対応する連立方程式はちょうど１つの解を持つ．この解は，$\mathcal{S}$ の解にもなっている． □ (系 7.9)

A を行列とするとき，A に基本変形を複数回施して得られる簡約な階段行列 (複数) の主成分を持つ行の数のうち最小のものを A の**階数** (rank) とよび，$rank(A)$ とあらわす．この定義は教科書の定義と見かけ上異るが，ここでの定義は，A に基本変形を複数回施して得られる簡約な階段行列が一意に決まる，という，この段階でまだ証明していない事実を用いなくても意味をなすものとなっている (この一意性が証明できれば教科書での定義と，ここでの定義の同値性の証明も，得られることになる).

“Echelon form” という用語を「階段形」と訳したために,「階数」という訳語がちょうどこの用語の提供するイメージに一致するものになっていることに注意する．一方， echelon は近代の戦争で歩兵隊や艦隊の最前列を斜めに配列して進軍するときの隊型のことだが，もともとは階段の意味を持つギリシャ語由来の単語である[11]．英語では，この単語は，階級制度の階層の意味もあるので，rank (階級) はこれに合う用語の選択になっていると言える．

定理 7.6 により次がわかる[12]:

系 7.10 (教科書の定理 2.3.1) 連立一次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解を持つのは，この連立方程式の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A \,\vdots\, \mathbb{b}]$ に対し，$rank(A) = rank(\tilde{A})$ が成り立つちょうどそのときである． P-7-10

証明． $rank(A) \leq rank(\tilde{A})$ は常に成り立つ: $\tilde{A}$ に基本変形を複数回施して $rank(\tilde{A})$ 個の主成分を持つ行を持つ簡約な階段形の行列 $\tilde{B} = [B \,\vdots\, \mathbb{b}']$ を作ると，B は A に同じ基本変形の複数回の列を施して得られた行列となっている．したがって，$rank(A) \leq$ “B の主成分を持つ行の数” $\leq$ “$\tilde{B}$ の主成分を持つ行の数” $\leq rank(\tilde{A})$ である．

もし $rank(A) < rank(\tilde{A})$ だとすると．連立一次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A \,\vdots\, \mathbb{b}]$ に対して，A に基本変形を複数回施して，ちょうど $rank(A)$ 個だけ主成分を持つ行を含むような簡約な階段形の行列 B が得られる．同じ (複数の) 基本変形の列を施行することで，$\tilde{A}$ を変形して $\tilde{B}[B \,\vdots\, \mathbb{b}']$ が得られたとすると，$\tilde{B}$ に更に基本変形を複数回施して，B には変更を加えずに簡約な階段形の行列 $\tilde{B}'[B' \,\vdots\, \mathbb{b}'']$ を得ることができるが，仮定から，$\tilde{B}'$ の主成分を持つ行の数は，$\tilde{B}$ の主成分を持つ行の数より真に大きい．このことは，$\tilde{B}'$ が $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ という形の行を持つことを意味するが，このときには，(一次方程式 $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$ は解を持たないので) 連立方程式 $B'\mathbb{x} = \mathbb{b}''$ は解を持たない．定理 7.5 により $B'\mathbb{x} = \mathbb{b}''$ は $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ と同値だから，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ も解を持たない．

---

[10] $\tilde{A}$ (あるいは，同値であるが $\tilde{B}$) が n 行の行列の場合には，すべての行が主成分を持ち，B は単位行列 E_n になる．

[11] 近代の戦略の教科書には，この単語は必ず出てくると思われるので，江戸時代の末期にオランダ語の戦略の教科書を訳している高野長英による，この単語の訳語があるに違いない．

[12] 定理 7.6 での一意性の主張は以下の系の証明では必要にならない．

$rank(A) = rank(\tilde{A})$ として，拡大係数行列 $\tilde{A}$ に基本変形を複数回施して，$rank(\tilde{A})$ 個の主成分を持つ行を持つ簡約な階段形の行列 $\tilde{B} = [B \vdots \mathbb{b}']$ が得られる．このとき B は同じ基本変形の列を A に施して得られる簡約な階段形の行列で，“B の主成分を持つ行の数” $\leq$ “$\tilde{B}$ の主成分を持つ行の数” だから，$rank(\cdot)$ の定義と上の仮定から，“B の主成分を持つ行の数” $=$ “$\tilde{B}$ の主成分を持つ行の数” である．したがって，拡大係数行列 $\tilde{B}$ は，例7.3 の (2) か (3) と同様の形をしている (つまり $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ という形の行を持たない) から，いずれの場合にも連立方程式 $B\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ の解は存在する．定理7.5 により，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は $B\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ と同値だから，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解は存在する． ❏ (系 7.10)