講義の web page

http://fuchino.ddo.jp/kobe/index.html

6月20日: 休講

補講 7月17日(水) 5限 (うりぼうネット参照)

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

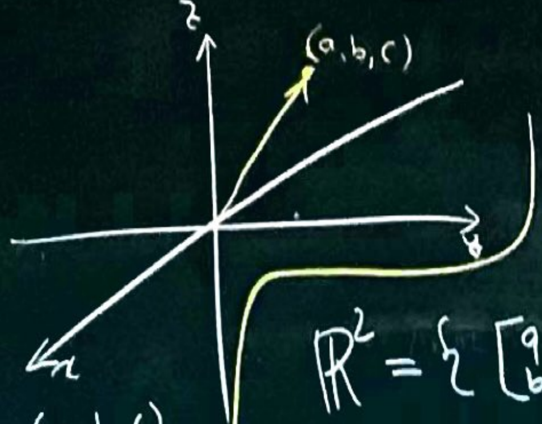
n次元 (実)ベクトル空間

$\mathbb{R}^3$ は $\underbrace{\text{空間}}_{\text{3次元}}$ の点の全体と同一視できる.

$\mathbb{R}$: 実数の全体

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

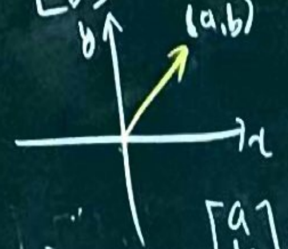
$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ を (a, b, c) と同一視

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を (a, b) と 同一視

関数 (写像) $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像 (または、線形変換) であるとは、

すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ $c \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $\varphi(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = \varphi(\mathbb{a}) + \varphi(\mathbb{b})$

(2) $\varphi(c\mathbb{a}) = c\varphi(\mathbb{a})$

が成り立つこと。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

補題 1.1 Aを $m \times n$ 行列として

$$\varphi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m ; \mathbb{b} \longmapsto A\mathbb{b}$$

として定義すると、φ_A は線形写像となる。

$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ のとき、$\mathbb{a} + \mathbb{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{bmatrix}$

$$c\mathbb{a} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_m \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Aを $m \times n$ 行列として $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ とするとき、$A = [a_{ij}]$ $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

として

$$A\mathbb{b} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + \cdots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + \cdots + a_{mn}b_n \end{bmatrix}$$ となる。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_j$$

より一般には，$m\times n$ 行列 A と $n\times l$ 行列 B に対し

$A=[a_{ij}]$ $B=[b_{jk}]$ として

AB を (i,k)-成分が

$$(AB)_{ik}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

となる $m\times l$ 行列として定義する.

計算則：

$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$

$AcB=c(AB)$

$(AB)C=A(BC)$

ただし，

$AB=BA$

とはかぎらない！

補題 1.1 証明

φ_A が (1) と (2) を満たすことを示せばよいが

$$\varphi_A(a+b)=A(a+b)=Aa+Ab$$
$$=\varphi_A(a)+\varphi_A(b)$$

により (1) は成り立つ.

$$\varphi_A(ca)=Aca=cAa=c\varphi_A(a)$$

により (2) も成り立つ. ☒

補題 1.2

$\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を線形写像とすると，

$\varphi=\varphi_A$ とあらわせるような $m\times n$ 行列 A が1意に決まる.

…

証明 $1 \leq i \leq n$ とに $e_i^n = \left.\begin{array}{r} \\ \\ i \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} n$ とする

$\varphi(e_i^n) = a_i$ とする.

このとき任意の $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ に対し,

$b = b_1 e_1^n + b_2 e_2^n + \cdots + b_m e_m^n$ とあらわせるから,

φ が線形写像であることから,

$$\varphi(b) = \varphi(b_1 e_1^n + b_2 e_2^n + \cdots + b_m e_m^n)$$
$$= b_1 \underbrace{\varphi(e_1^n)}_{a_1} + b_2 \underbrace{\varphi(e_2^n)}_{a_2} + \cdots + b_m \underbrace{\varphi(e_m^n)}_{a_m}$$

$$\overset{Ab}{=} [a_1 \cdots a_m]\, b \quad \text{となる}$$

したがって $A = [a_1 \cdots a_m]$ とすると

$\varphi = \varphi_A$ である.

$\overset{[a_{ij}]}{A}$ と $\overset{[a'_{ij}]}{A'}$ を異なる行列として たとえば (i,j) 成分が異なれば

$A e_i^n = \begin{array}{r} \\ \\ j \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ \bigcirc \\ \vdots \\ a_{im} \end{bmatrix}$ $A' e_i^n = \begin{array}{r} \\ \\ j \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a'_{i1} \\ \vdots \\ \bigcirc \\ \vdots \\ a_{im} \end{bmatrix}$ だから $A e_i^n \neq A' e_i^n$

である. したがって $\varphi_A \neq \varphi_{A'}$ である.

したがって $\varphi = \varphi_A$ となる A は高々1つである. ∎

$n = m$ の場合を考える。

線形写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して $c \in \mathbb{R}$ が φ の固有値であるとは、ある $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$ に対して、$\varphi(x) = cx$ となること。このような x を c の固有ベクトルとよぶ

φ での固有値

補題1.3

φ での固有値 c の固有ベクトルは無限個存在する

特に x が c の φ での固有値なら任意の $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ に対し ax が c の φ での固有値である

$$n\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right. \in \mathbb{R}^n$$ をゼロベクトルとよび $\mathbf{0}$ であらわす。

証明

$$\varphi(\underline{ax}) \underset{\text{線形写像の性質(2)}}{=} a\varphi(x) \underset{x\text{ は }c\text{ の }\varphi\text{ での固有値}}{=} a(cx) = (ac)x = c(\underline{ax})$$

また $a \neq 0$ $x \neq 0$ により $ax \neq 0$

したがって ax は c の φ での固有ベクトルである。 ∎

$n\times n$ 行列 A を $\varphi=\varphi_A$ となるように
とる（補題1.2）このとき，c が φ の固有値である

$\Leftrightarrow$ ある $x\in\mathbb{R}^n$ $x\neq 0$ に対し $\varphi(x)=cx$

$\Leftrightarrow$ ある $x\in\mathbb{R}^n$ $x\neq 0$ に対し $\varphi_A(x)=cx$

$\Leftrightarrow$ 〃 〃 〃 $Ax=cx$

$n\times n$ 行列 A と実数 c について，ある $x\in\mathbb{R}^n$ $x\neq 0$ で
$Ax=cx$ となるとき c を A の固有値といい このような x を
A の固有値 c に対する固有ベクトルとよぶ．

例

(1) $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$ とするとき 2 と 3 は A の固有値である

$$Ae_1^2=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=2e_1^2$$

$$Ae_2^2=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=3e_2^2$$

(2) 固有値を全くもたない正方行列も存在する．$0<\theta<2\pi$ とって $\theta\neq\pi$

$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ とおくとすべてのベクトル $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ に対して

$R_\theta\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ のスカラー倍にはならない！ □