線形代数 2 — 2020年07月02日の講義

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

(2020年07月05日12:14版)

以下は，2020年07月02日に実施の線形代数2のオンライン講義 (第2 quarter 1回目) です．逆行列の掃き出し法による計算法の説明が主な内容となっています．このテキストの内容は主に教科書の 第2章「連立1次方程式」の 2.4 に対応しますが，教科書ではあまり強調されていない，いくつかの事項については，教科書とは違う記述の仕方で述べてあります．

このファイルの最新版は，https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-01-2020-07-02.pdf から download できます．

以下で，は $n \geq 1$ に対する $n \times n$-行列を **n-次正方行列**とよぶことにする．n-次正方行列 A が与えられたときに，A が正則であるかどうか (つまり，A が逆行列を持つかどうか) を決定し，また正則のときには，その逆行列を計算する方法について考察する．後で，逆行列の理論的な計算法である「クラーメルの公式」(教科書の定理3.4.2) を考察する．この計算法は，実際の計算のための手法としては役にたたず，むしろ線形代数の理論を構築するときの重要なステップというような意味合いを持つものである (たとえば次の定理1.1は，クラーメルの公式を用いて証明される)．

今回の講義での掃き出し法による逆行列の計算方法は，手計算で逆行列を求めるときの方法で，計算機による逆行列の計算法の基礎になる考え方でもある．

n-次正方行列 A に対し，n-次正方行列 B が A の**逆行列**であるとは，$AB = BA = E_n$ となることだった[1]．A の逆行列は，存在すれば一意に決まる ([1], 補題7.1)．そこで A が逆行列を持つとき，(つまり A が正則なとき) A の逆行列を A^{-1} であらわすことにする．n-次正方行列 A, B がともに正則なら AB も正則で，$B^{-1}A^{-1}$ がその逆行列となる ([1], 補題7.2) 実は，B が A の逆行列であることを調べるには，$BA = E_n$ となることを調べれば十分である:

補題 1.1 (教科書の定理2.4.1 — 教科書では証明は p.57で述べられている) A を n-次正方行列とするとき，$BA = E_n$ となる行列 B が存在すれば，A は正則で，このとき B は A の逆行列となる． P-2-1-0

❑

[1] E_n は n-次の単位行列をあらわす．

この補題は，本 quarter の終りで証明されるが，以下では，この補題を仮定して，議論をする．後で証明される命題を用いて議論をすると，悪循環が起って，議論が破綻する恐れがあるが，ここでは，これが起っていないことは，後で確かめられる．

[1] でも見たように，任意の行列 A に，基本変形を複数回施すことで[2]，簡約な階段形の行列 B に変形することができる．特に A が n-次正方行列で，A の階数が n のときには，このようにして得られた B は単位行列 E_n になっている．一つ一つの基本変形は，$S^n_k(c)$, $T^n_{k,\ell}$, $R^m_{k,\ell}(d)$ のどれかの形をした行列 (基本行列) を行列 A に左からかけることに対応するのだった．したがって，A を E_n に変形するために複数回施した基本変形に対応する，このような形をした行列が B_1, B_2 ,..., B_k だとすると，

$$(1.1) \qquad B_k \cdots B_2 B_1 A = E_n$$ x-2-1-0

という等式が得られたことになる．したがって $B = B_k \cdots B_2 B_1$ とすると，$BA = E_n$ だから，補題 1.1 により，A は正則で，B が A の逆行列であることがわかる．

今 $\tilde{A} = [A \,\vdots\, E_n]$ とすると，$0 \le i \le k$ に関する帰納法で

$$(1.2) \qquad B_i \cdots B_2 B_1 \tilde{A} = [B_i \cdots B_2 B_1 A \,\vdots\, B_i \cdots B_2 B_1 E_n] = [B_i \cdots B_2 B_1 A \,\vdots\, B_i \cdots B_2 B_1]$$

となることがわかる．特に $i = k$ とすると，$B_k \cdots B_2 B_1 \tilde{A} = [B_k \cdots B_2 B_1 A \,\vdots\, B_k \cdots B_2 B_1] = [E_n \,\vdots\, B_k \cdots B_2 B_1]$ である．このことから，次の逆行列の計算法が成立することがわかる．

P-2-1-1

補題 1.2 A を n-正方行列として，$\tilde{A} = [A \,\vdots\, E_n]$ とする． $\tilde{A}$ に基本変形を複数回施して $[E_n \,\vdots\, B]$ という形の行列が得られたときには，A は正則で $B = A^{-1}$ である． ❑

教科書の例題 2.4.1 (p.36) がこの補題の応用例となっていることを確かめよ．

上の補題 1.2 と先 quarter で見たいくつかの事実を組み合わせると，次の定理が示せる．行列 A に基本変形を複数回施して簡約な階段形の行列 B が得られるとき，B は A の**簡約化**であるということにする．また，B が A の 1 つの簡約化であるとき，A から B を得るための基本変形の列のことも簡約化とよぶことにする．

行列 A に対し，その簡約化 B は，実は，一意に決まるが[3]，このことはまだ証明していなかった．教科書では，この事実を用いた議論をしているが，ここでは，この事実を用いずに議論をすることにする．先学期の最後の講義 [1] では，このため，階数の定義を以下のように教科書とは異る (が，簡約化の一意性が示されると教科書での定義と同値になることが分かる) 次のようなやり方で導入されていた: A を行列とするとき A の**階数** (rank) とは，A の簡

[2] [1] で述べたようにこの，「基本変形を複数回施す」は 0 回施す (つまり何もしない)， 1 回施す，も含むものとしている．

[3] これに対して，基本変形の列としての簡約化は複数ある．

約化の主成分を持つ行の個数のうち最小のものとする[4]．A が n-次の正方行列で，A の階数が n のときには，A のすべての簡約化は E_n となることに注意する．このことを使うと次の定理 1.4 の (1) と (2) の同値性が直ちに証明できる．

P-2-1-1-0

補題 1.3 (1) B を n-次正方行列で，簡約な階段形になっているものとする．$B \neq E_n$ なら B は正則でない．

(2) n-次正方行列 B が正則でなければ，任意の正則な n-次正方行列 C に対し，BC も CB も正則でない[5]．

証明． (1): $B \neq E_n$ なら，B の n-行目はゼロベクトル $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ である．どんな n-次正方行列 C に対しても，BC の (n, n)-成分は 0 になるから，特に C は B の逆行列ではない．したがって，B は逆行列を持たない．つまり，B は正則でない．

(2): もし BC が正則とすると，n-次正方行列 D で，$BCD = E_n$ となるものがあるが，このとき，$B = D^{-1}C^{-1}$ となる，したがって，上で既に引用した [1], 補題 7.2 により $B^{-1} = CD$ で，B は正則となってしまい，仮定に矛盾である．CB が正則であることも同様に示せる．

□ (補題 1.3)

定理 1.4 (教科書 2.4.2) A を n-次正方行列とするとき，以下は同値である: P-2-1-2

(1) $rank(A) = n$ である;
(2) E_n は A の簡約化である;
(3) 任意の $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ はちょうど１つの解を持つ;
(4) $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ は自明でない解を持たない;
(5) A は正則である．

証明． (1) ⇒ (2): $rank(A) = n$ とすると，上で述べたように A の簡約化は E_n である．

(2) ⇒ (3): A の E_n への簡約化が基本行列の積 $B_k \cdots B_2 B_1$ に対応するものとすると，連立一次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の拡大係数行列 $[A \,\vdots\, \mathbb{b}]$ は，この基本行列の積を左からかけることで $[E_n \,\vdots\, B_k \cdots B_2 B_1 \mathbb{b}]$ に変形される，このことから，$\mathbb{x} = B_k \cdots B_2 B_1 \mathbb{b}$ は $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の唯一の解であることがわかる．

(3) ⇒ (4): $\mathbb{0} \in \mathbb{R}^n$ は $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ の解だから，(4) は (3) の特別な場合になっている．

---

[4] 簡約化は一意に決まる，という事実を仮定せずに議論しているため，A の簡約化は C_1, C_2,... と複数存在する可能性が残っているが，ここでは，そのようなものの一つ一つの主成分を持つ行の数を考えて，それらの数のうち最小のものを A の階数として定義している．

[5] 後で，C の正則性の条件はこの命題からはずせることが示されるが，以下の応用では，この形の命題で十分である．

(4) ⇒ (5): A を正則でないとすると，補題 1.2 により，A の簡約化 B で E_n と異るものがある．このとき，$\tilde{B} = [B \,\vdots\, \mathbb{0}]$ は，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の簡約化で，$\tilde{B}$ は主成分の現れない右はじでない列を持つから，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は無限個の解を持つので，特に自明でない解も持つ．

(5) ⇒ (1): $rank(A) < n$ とすると，A の簡約化 B で E_n と異るものがあるが，基本行列 $B_1, B_2, \ldots, B_k$ を $B = B_k \cdots B_2 B_1 A$ となるものとすると，$A = (B_1)^{-1}(B_2)^{-1} \cdots (B_k)^{-1} B$ となるから，補題 1.3,(1),(2) により，A は正則でない． □ (定理 1.4)

参考文献

[1] 渕野 昌，線形代数 1 — 2020 年 06 月 18 日の講義,
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-1-07-2020-06-18.pdf