線形代数 2 — 2020年07月09日の講義 (第2クォーター2回目)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

(2020 年 08 月 08 日 12:00 版)

以下は，2020 年 07 月 09 日に実施の線形代数 2 のオンライン講義 (第 2 quarter 2 回目) です．置換 (ちかん) について説明が主な内容となっています．このテキストの内容は主に教科書の 第 3 章 「行列式」 の 3.1 に対応します．教科書ではあまり強調されていない，いくつかの事項については，教科書とは違う記述の仕方で述べてあります．

このファイルの最新版は，https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf から download できます．

この講義のファイルは，講義の日時の前後で複数回修正加筆される可能性のある work in progress です[1)]．

以下で置換 (ちかん，permutation) について説明する．置換の概念と置換の偶奇性の概念は，次回に導入することになる行列式の定義で必要になる．

教科書 [3] p.38 にもあるように, σ が n-**次の置換**であるとは, $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \{1, 2, , ..., n\}$ で，σ は 1-1 onto であることである．$\{1, 2, ..., n\}$ は有限集合なので，1-1 (1 対 1) を言えば，onto (上への写像) であることは，これから自動的に従う．n-次の置換の全体を S_n と表わすことにする[2)]．

(2.1) $\quad S_n = \{\sigma : \sigma$ は n-次の置換$\}$

---

1) “Work in progress” という表現の由来については，たとえば https://en.wikipedia.org/wiki/Finnegans_Wake を参照してください．

2) 写像 $f : X \rightarrow Y$ が 1-1 (1 対 1) であるとは，すべての異る $a, b \in X$ に対し，$f(a) \neq f(b)$ が成り立つことである．f が Y の上への写像である (onto であると略称する) とは，すべての $c \in Y$ に対し $f(a) = c$ となる $a \in X$ が存在することである．このことは，X の f による像 $f[X] = \{f(a) : a \in X\}$ について，$Y = f[X]$ が成り立つこと，と言い換えることもできる．

X が有限集合のときには，$f : X \rightarrow X$ が 1-1 なら，f は onto でもある．$\#(X) = n$ として ($\#(X)$ で X の要素の数をあらわす) f が 1-1 なら，$\#(f[X]) = n$ となるので，$f[X] \subseteq X$ だから，$f[X] = X$ となることがわかる．同様に X が有限で，$f : X \rightarrow X$ が onto なら，f は 1-1 である (演習)．

である[3]．組合せ論の議論から，S_n は $n!$ 個の要素を持つことがわかる．ここでは，各 $\sigma \in S_n$ は，$i \in \{1, 2, ..., n\}$ を $\sigma(i)$ で置き換える，という操作と捉えている[4]．

σ と τ を S_n の要素とするとき，置き換え τ をしたものを更に σ で置き換える，という置き換えの合成を考えてみる．$i \in \{1, 2, , ..., n\}$ は τ で $\tau(i)$ 置き換えられ，それが更に σ で $\sigma(\tau(i))$ に置き換えられる．この置き換えの合成の結果として得られる n-次の置換，つまり S_n の要素を $\sigma\tau$ という積として表わすことにする．つまり，$\sigma\tau$ は，合成関数の記号を使うと $\sigma \circ \tau$ のことである．

置換 $\sigma \in S_n$ が $\sigma(1) = k_1$, $\sigma(2) = k_2$,..., $\sigma(n) = k_n$ となっているとき，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

と書くことにする．この書き方では，上の行から下の行への対応のしかただけに着目しているものとする．したがって，上の例は，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & n \\ k_2 & k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

などとも書ける．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

である．

$\sigma, \tau \in S_5$ で，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

x-2-0

のとき，$\sigma\tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 1$,　$\sigma\tau(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2$,...,　$\sigma\tau(5) = \sigma(\tau(5)) = \sigma(2) = 3$ だから，

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

である．置換の積も，行列の積と同じように，一般には可換でない (積の順序を変えると結果が必ずしも同じではない)．例えば，(2.5) の σ と τ については，

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

となるから，$\sigma\tau \neq \tau\sigma$ である．

行列の積と同じように，置換の積も結合則が成り立つ:

P-2-0

補題 2.1 すべての $\sigma, \tau, \nu \in S_n$ に対し，$(\sigma\tau)\nu = \sigma(\tau\nu)$ が成り立つ．

証明． すべての $k \in \{1, 2, ..., n\}$ に対し，$((\sigma\tau)\nu)(k) = (\sigma(\tau\nu))(k)$ が成り立つことを示せばよいが，これは

$$
\begin{aligned}
((\sigma\tau)\nu)(k) &= (\sigma\tau)(\nu(k)) && ;\sigma\tau \text{ と } \nu \text{ の } S_n \text{ での積の定義による} \\
&= \sigma(\tau(\nu(k))) && ;\sigma \text{ と } \tau \text{ の } S_n \text{ での積の定義による} \\
&= \sigma(\tau\nu(k)) && ;\tau \text{ と } \nu \text{ の } S_n \text{ での積の定義による} \\
&= (\sigma(\tau\nu))(k) && ;\sigma \text{ と } \tau\nu \text{ の } S_n \text{ での積の定義による}
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

によりよい． □ (補題 2.1)

行列の積での単位行列に対応するのは，**単位置換**とよばれる何も置き換えない置換 $\varepsilon_n \in S_n$ である[5]．n が何か明らかなときには，添字の n を落として単に ε とも書くことにする．

$$
\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{2.9}
$$

である．

(2.10) すべての $\sigma \in S_n$ に対して $\varepsilon_n\sigma = \sigma\varepsilon_n = \sigma$ である．

行列の積のときとは異なり，すべての置換にはその逆が存在する．$\sigma \in S_n$ に対し，

$$
\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{2.11}
$$

として，

$$
\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{2.12}
$$

とすると，$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon_n$ となる．σ^{-1} を σ の**逆置換**とよぶ．補題 2.1 により，逆行列のときと全く同じ証明で，逆置換の一意性が成り立つことが示せる．つまり，

P-2-1

補題 2.2 任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対し，$\tau\sigma = \sigma\tau = \varepsilon_n$ となる $\tau \in S_n$ は，σ^{-1} に等しい．

証明． $\tau, \tau' \in S_n$ を，$\tau\sigma = \sigma\tau = \varepsilon_n, \tau'\sigma = \sigma\tau' = \varepsilon_n$ となるものとすると，

---

[3] 記号 “S_n” は教科書 [3] では導入されていないが，これは標準的な記法である．S_n は “symmetric group of degree n” とよばれる．記号での “S” はこの名称の頭文字から来ている．

[4] “σ” はギリシャ文字の小文字のシグマである．σ は，ラテン文字の “s” に対応するので，S_n の要素という繋がりで選ばれている文字である．“τ” はギリシャ文字の小文字のタウ．シグマの次の文字である．

[5] ε はギリシャ文字，小文字のイプシロンである．

$$\tau = \tau\varepsilon_n = \tau(\sigma\tau') \underbrace{=}_{\text{補題 2.1 による}} (\tau\sigma)\tau' = \varepsilon_n\tau' = \tau'$$

である. □ (補題 2.2)

$1 \leq i < j \leq n$ に対し，S_n の要素で，i と j を入れ替え，$\{1, ..., n\}$ の他の要素は動かさないようなものを，i, j **の互換**とよび，これを $(i\ j)$ と書く.

$$(2.13)\quad (i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

である.

$1 \leq i < j \leq n < n'$ のときには，S_n での $(i\ j)$ と $S_{n'}$ での $(i\ j)$ は厳密には区別しなくてはならない．区別して書くときには，それぞれを $(i\ j)_n$ $(i\ j)_{n'}$ と書くことにする．$(i\ j)_n$ は，$(i\ j)_{n'}$ を $\{1, 2, ..., n\}$ に制限して得られる写像である．しかし，以下では，$(i\ j)_n$ と $(i\ j)_{n'}$ を同一視して，単に $(i\ j)$ と書くことが多い.

以下の定理が今回の講義でのハイライトである:

P-2-2

命題 2.3 任意の $n \geq 2$ と $\sigma \in S_n$ に対し，σ は (複数の[6]) 互換の積として表わせる.

証明． $\sigma \in S_n$ とすると，補題 2.4 により，σ は複数の巡回置換 (定義は以下を参照) の積の形に書ける．この積に現れる巡回置換は，補題 2.5 により，それぞれ互換の積の形に書き換えられるから，それを行なうと，σ の互換の積のによる表現が得られる. □ (命題 2.3)

$n \geq 2$ に対し，$k_1, k_2, ..., k_m$ を互いに異る $\{1, 2, ..., n\}$ の要素とする．このとき，$\sigma(k_1) = k_2$, $\sigma(k_2) = k_3, ..., \sigma(k_m) = k_1$，かつ，すべての $\ell \in \{1, 2, , ..., n\} \setminus \{k_1, k_2, ..., k_m\}$ に対し[7]，$\sigma(\ell) = \ell$ で定義される S_n の要素 σ を，($k_1, k_2, ..., k_m$ の) **巡回置換**とよび，$\sigma = (k_1, k_2, ..., k_m)$ で表わす．m を巡回置換 σ **の周期**とよぶ．互換は周期が 2 の巡回置換に他ならない.

P-2-3

補題 2.4 すべての $n \geq 2$ と $\sigma \in S_n$ に対し，σ は複数の巡回置換の積として表わせる.

証明． $\sigma = \varepsilon_n$ のときには，$\sigma = (1\ 2)(1\ 2)$ と表わせるから，主張は成り立っている.

$\sigma \in S_n$ に対し，σ のサポート (support) $supp(\sigma)$ を $supp(\sigma) = \{k : 1 \leq k \leq n, \sigma(k) \neq k\}$ と定義する．$supp(\sigma) = \emptyset$ なら [8]，$\sigma = \varepsilon_n$ である.

$2 \leq k \leq n$ に関する帰納法で,

(2.14) $\sigma \in S_n$ について $supp(\sigma)$ の要素の数が k 以下なら，σ は巡回置換の積として表わせる. x-2-1

[6] ここでも，「複数の」は 0 個の場合も 1 個の場合も含んでいる.

[7] 2 つの集合 A, B に対し，$A \setminus B$ で A の要素で B の要素でないようなものの全体の集合を表わす．つまり，$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$ である.

[8] $\emptyset$ で空集合 (くうしゅうごう，何も要素を持たない集合) を表わす.

が成り立つことを示す[9]．$k=2$ なら，σ は単位置換であるか，あるいは互換であるかのいずれかだから，上の注意から，いずれの場合にも σ は巡回置換の積として表わせる．今 $2 \le k < n$ に対して (2.14) が成りたっているとして，$k+1$ に対しても (2.14) が成り立つことを示す．$\sigma \in S_n$ で $supp(\sigma)$ の要素の数は $k+1$ 以下とする．$\sigma = \varepsilon_n$ なら，上での注意から σ は巡回置換の積として表わせるから，$\sigma \neq \varepsilon_n$ としてよい．$\ell \in \{1, ..., n\}$ を $\sigma(\ell) \neq \ell$ となるようなものとして，$\ell_1, \ell_2, ...$ を $\ell_1 = \ell$, $\ell_2 = \sigma(\ell_1)$, $\ell_3 = \sigma(\ell_2)$ と順にとってゆくと，$\{1, ..., n\}$ は有限だから，ある $m < n$ に対し，$\ell_m = \ell\ (= \ell_1)$ となる．m をそのようなものの最小のものとすると，$\ell_1, ..., \ell_m$ は互いに異る[10]．今 σ' を，$supp(\sigma') = \{1, ..., n\} \setminus \{\ell_1, ..., \ell_m\}$ で，$i \in sup(\sigma')$ に対して $\sigma'(i) = \sigma(i)$ となるようなもの，とすると，帰納法の仮定から，σ' は複数の巡回置換の積として書ける．したがって，$\sigma = (\ell_1 \cdots \ell_m)\sigma'$ となるから，σ も複数の巡回置換の積として書ける．

❏ (補題 2.4)

P-2-4

補題 2.5 すべての巡回置換は複数の互換の積として書ける．

証明． $\sigma \in S_n$ を巡回置換として，$\sigma = (k_1 k_2 \cdots k_m)$ とすると，

$$\sigma = (k_1 k_2 \cdots k_m) = (k_1\ k_m) \cdots (k_1\ k_3)(k_1\ k_2) \tag{2.15}$$

となるからよい．

❏ (補題 2.5)

例 2.1 補題 2.5 の証明のアイデアを用いると，$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$ である．

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\
 & & & & & & (1\ 2) \\
2 & 1 & 3 & 4 & 5 & & \\
 & & & & & & (1\ 3) \\
2 & 3 & 1 & 4 & 5 & & \\
 & & & & & & (1\ 4) \\
2 & 3 & 4 & 1 & 5 & & \\
 & & & & & & (1\ 5) \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & &
\end{array}$$

❏

P-2-5

補題 2.6 巡回置換 $(k_1\ k_2\ \cdots\ k_{n-1}\ k_n)$ の逆置換は，$(k_n\ k_{n-1}\ \cdots\ k_2\ k_1)$ である．

証明． $\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_{n-1}\ k_n)$, $\tau = (k_n\ k_{n-1}\ \cdots\ k_2\ k_1)$ として，$\tau\sigma = \varepsilon$, $\sigma\tau = \varepsilon$ となることを示せばよい．σ と τ は S_m の要素として考えているものとする．

---

[9] 特に $k=n$ のときには，(2.14) の主張は補題の主張と一致するから，これにより補題が示せたことになる．

[10] これは直観的には明らかだが，きちんと証明しようとすると，ちょっと工夫がいる．(演習)

$1 \leq i < n$ に対し，$\sigma(k_i) = \sigma(k_{i+1})$ だから，$\tau(\sigma(k_i)) = \tau(k_{i+1}) = k_i$ である．$i = n$ なら，$\sigma(k_n) = k_1$ だから，$\tau(\sigma(k_n)) = \tau(k_1) = k_n$ である．以上から，すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，$\tau(\sigma(k_i)) = k_i$ となることが示せた．$\ell \in \{1, 2, ..., m\} \setminus \{k_1, ..., k_n\}$ とすると σ も τ も ℓ を動かさないから，$\tau(\sigma(\ell)) = \ell$ である．以上から $\tau\sigma = \varepsilon$ が示せた．

$\sigma\tau = \varepsilon$ についても同様の議論で示せる． □ (補題 2.6)

参考文献

[1] 渕野 昌，2016 年 6 月 23 日の講義の板書の画像
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/linalg-2-2016-06-23.pdf

[2] 渕野 昌，2016 年 6 月 30 日の講義の板書の画像
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/linalg-2-2016-06-30.pdf

[3] 三宅 敏恒，線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ，培風館 (2008).

[このテキストはほぼ完成版となっていますが．まだ細分の手直しや書き足しをする可能性もありまる．最新版をチェックしてください．最新版は，このファイルと同じ URL

https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf

から download できます．]