正方行列（$n\times n$ 行列）の対角化

diagonalization

$n\times n$ 行列 $A=[a_{ij}]$ が対角行列 (diagonal matrix) とは

すべての $1\leq i,j\leq n$ に対して、$i\neq j$ なら

$a_{ij}=0$ となること。対角行列 A が

$$A=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n\end{bmatrix}$$ という形をしているとき、

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & & & O\\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

各 ε_i は A の固有値である

$$e_i^n=\left.\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n$$

で i 番目の n 次元（標準）単位ベクトルをあらわすことにすると、

$$Ae_i^n =$$

$$\begin{array}{r}\\ \\ i\text{行} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_i & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & \varepsilon_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_i e_i^n$$

だから、ε_i は固有ベクトル e_i^n に対応する固有値になっている。

$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{bmatrix}$ を対角行列とすると

$$AB = BA = \begin{bmatrix} \varepsilon_1\delta_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \varepsilon_n\delta_n \end{bmatrix}$$ となる。

$n\times n$ 行列 A に対して、ある可逆(逆行列を持つ) $n\times n$ 行列 U があって

$U^{-1}AU$ が対角行列となるとき、

このような(Uと) $U^{-1}AU$ を A の対角化とよぶ

補題 3.1

$U^{-1}AU$ が A の対角化で

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix}\varepsilon_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \varepsilon_n\end{bmatrix} \text{ かつ } U = [u_1 \cdots u_n]$$

とするとき，各 ε_i は A の固有値で u_i は A の固有値 ε_i に対する固有ベクトルである．

証明 U が可逆なので各 u_i はゼロベクトルでない！

もし $u_i = 0$ だとすると

$$0 \neq e_i^n = \underbrace{U^{-1}U}_{E_n} e_i^n = U^{-1}0 = 0$$ となり矛盾．

$$U e_i^n = [u_1 \cdots u_n] \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} = u_i = 0$$

$\varepsilon_i e_i^n$

$$= U^{-1}A\underbrace{U e_i^n}_{u_i} = U^{-1}Au_i$$

この等式の両辺に左から U をかけると，

$$U\varepsilon_i e_i^n = \underbrace{UU^{-1}}_{E_n}Au_i = Au_i$$

$$\begin{array}{c} U\varepsilon_i e_i^n \\ \| \\ \varepsilon_i U e_i^n \\ \| \\ \varepsilon_i u_i \end{array}$$

したがって ε_i は A の固有値で u_i がこの固有値に対応する固有ベクトルである □

補題 3.2 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ を $n \times n$ 行列 A の固有値として, $u_1 \cdots u_n$ を $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ に対応する固有ベクトルで $U = [u_1 \cdots u_n]$ が逆行列 U^{-1} を持つとき, $U^{-1}AU$ は A の対角化で

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

となっている.

ただし $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ の中には同じものがあってもよい

証明 各 $1 \leq i \leq n$ に対して

$$U^{-1}AU e_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} = \varepsilon_i e_i^n$$

となっていることを示せばよい

$n \times n$ 行列 B に対して

$$B e_i^n = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$$

となる.

$$U^{-1}A \underbrace{U e_i^n}_{= u_i} = U^{-1}A u_i$$

$$= U^{-1} \varepsilon_i u_i$$

$$= \varepsilon_i \underbrace{U^{-1} u_i}_{U^{-1}U \text{ の } i \text{ 列}} = \varepsilon_i e_i^n$$

$$\underbrace{U^{-1}U}_{E_n}$$

$\boxtimes$

補題 3.3

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ として

$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ab - bc \neq 0$ のときには

A は可逆で $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

である.

証明

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\det(A)}{\overset{\parallel}{ad-bc}} & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

だから $\det(A) \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_n$$

同様に $\dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_n$

$\boxtimes$

例

$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ として A の対角化を求める.

A の固有値を求めるために A の固有多項式を

考える：$\det\left(\begin{bmatrix} 8-\lambda & -10 \\ 5 & -7-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow (8-\lambda)(-7-\lambda) + 50 = 0$

$\Longleftrightarrow -56 - 8\lambda + 7\lambda + \lambda^2 + 50 = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$\Longleftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda = 3$ または $\lambda = -2$

$\lambda = 3$ の固有ベクトルは

$\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5x - 10y = 0 \\ 5x - 10y = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow x = 2y$ だから たとえば

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $\lambda = 3$ の固有ベクトル

である 検算：

$\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

だから o.k.

$\lambda=-2$ の固有ベクトルは，

$$\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 10x-10y=0 \\ 5x-5y=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x=y$$

だから $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は固有値 -2 の固有ベクトル

である。

検算：

$\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の

$= \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

だから o.k.

ここで $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2\cdot 1 - 1\cdot 1 = 1 \neq 0$$

だから U は逆行列を持ち

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

検算

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり o.k.

したがって補題3.2から（あるいは計算でたしかめると）

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix}3&0\\0&-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&-10\\5&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$$

となりこれがAの対角化である。

⊠