線形代数 2 — 2020年07月16日の講義 (第2クォーター3回目)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

(2020年07月26日13:57版)

以下は，2020年07月16日に実施の線形代数 2 のオンライン講義 (第2 quarter 3回目) です．置換 (ちかん) の偶奇性と行列式の定義について説明が主な内容となっています．このテキストの内容は主に教科書の 第3章 「行列式」 の 3.1 と 3.2 に対応します．教科書ではあまり強調されていない，いくつかの事項については，教科書とは違う記述の仕方で述べてあります．

このファイルの最新版は，https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-03-2020-07-16.pdf から download できます．

この講義のファイルは，講義の日時の前後で複数回修正加筆される可能性のある work in progress です[1)]．

以下で置換 (ちかん，permutation) についての議論を続ける．置換の概念と置換の偶奇性の概念は，今回，導入することになる行列式の定義で必要になる．

教科書 [5] p.38 にもあるように，σ が n-**次の置換**であるとは，$\sigma : \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \{1, 2, , ..., n\}$ で，σ は 1-1 onto となっていることだった[2)]．n-次の置換の全体を S_n と表わす．

(3.1) $\quad S_n = \{\sigma : \sigma$ は n-次の置換$\}$

である．“S_n” ごいうのは教科書では最初の方では使っていない記号だが，標準的な記号の使い方である．

置換 $\sigma \in S_n$ が $\sigma(1) = k_1$, $\sigma(2) = k_2$,..., $\sigma(n) = k_n$ という値をとるものになっているとき，

---

1) “Work in progress” という表現の由来については，たとえば https://en.wikipedia.org/wiki/Finnegans_Wake を参照してください．

2) $f : X \rightarrow Y$ が 1-1 onto である，とは，日本語では，「f は 1 対 1 で Y の上への写像である」と表現される．これは，すべての異る $a, b \in X$ に対し，$f(a) \neq f(b)$ で (1-1)，すべての $c \in Y$ に対して $f(a) = c$ となる $c \in X$ が存在うする (onto) ことである．

$$(3.2)\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と書くのだった．

$1 \le i < j \le n$ に対し，S_n の要素で，i と j を入れ替え，他の要素は動かさないようなものを，i, j **の互換**とよび，これを $(i\ j)$ と書く．

$$(3.3)\quad (i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

である．

σ と τ を S_n の要素とするとき，置き換え τ をしたものを更に σ で置き換える，という置き換えの合成を考えてみる．$i \in \{1, 2, , ..., n\}$ は τ で $\tau(i)$ 置き換えられ，それが更に σ で $\sigma(\tau(i))$ に置き換えられる．この置き換えの合成の結果として得られる n-次の置換，つまり S_n の要素を $\sigma\tau$ という積として表わすことにする．つまり，$\sigma\tau$ は，合成関数の記号を使うと $\sigma \circ \tau$ のことである．置き換えの合成は，置換を 2 つの置換の間の積の演算と考えて $\sigma\tau$ を σ と τ の積ともよぶことにする．

前回の講義で，次を示した．

命題 2.3 任意の $n \ge 2$ と $\sigma \in S_n$ に対し，σ は (複数の[3]) 互換の積として表わせる． ❑

$\sigma \in S_n$ の互換の積としての表現は一意ではない．たとえば，単位置換 ε_n は $\varepsilon_n = (1\ 2)(1\ 2)$ とも $\varepsilon_n = (1\ 2)(1\ 2)(1\ 2)(1\ 2)$ とも表わせるし，巡回置換 $(1\ 2\ 3)$ は $(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$ とも $(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)$ とも $(1\ 2\ 3) = (2\ 3)(2\ 3)(1\ 3)(1\ 2)$, etc. とも表わせる．

しかし，以下が成り立つ．

P-3-0

定理 3.2 任意の $n \ge 2$ と置換 $\sigma \in S_n$ に対し，σ が互換の積として $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$, $\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_m$ と表わせるとするとき，m と n の偶奇性は等しい [4]．

この定理は以下の議論のために非常に重要なものである．Wikipedia [6] には，この定理の 4 つの異る証明が載っているが，以下の証明はそのうち最もエレガントな (しかし，自分で見つけようと思ってもそう簡単には見つけられないであろう) ものとほとんど同じものである．教科書 [5] では，この証明は，p.42 の問題 3.1, 5., 6., 7., 8. を解くと得られるようになっている．しかし，証明の細部をきちんと書き出すには，多少の工夫を要する．以下ではこの証明の細部を少し細かく見てみることにする．

---

[3] ここでも，「複数の」は 0 個の場合も 1 個の場合も含んでいる．

[4] 自然数 k の偶奇性 (parity) とは，それが奇数であるか偶数であるかという性質のことである．n と m の偶奇性が等しい，とは，したがって，$n = 2n' + \ell$, $m = 2m' + \ell'$ (ただし，$\ell, \ell' \in \{0, 1\}$) とするとき，$\ell = \ell'$ となることである．

定理 3.2 の証明． 変数 $x_1, \ldots, x_n$ を持つ (必ずしも一次ではない) 多項式の全体を PL とあらわすことにする．$f(x_1, \ldots, x_n) \in PL$ と $\sigma \in S_n$ に対し，

$$\sigma(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(s)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \tag{3.4}$$ x-3-0

として σ を PL から PL への関数とも看倣すことにする．このとき，

cl-3-0

Claim 3.2.1 $\sigma, \tau \in S_n$ と $f \in FL$ に対し，$\sigma\tau(f) = \sigma(\tau(f))$ である．

$\vdash$

$$\begin{aligned}
(\sigma\tau)(f(x_1, \ldots, x_n)) &= f\big(x_{(\sigma\tau)(1)}, x_{(\sigma\tau)(2)}, \ldots, x_{(\sigma\tau)(n)}\big) && ;\ PL \text{ から } PL \text{ への関数としての } \sigma\tau \text{ の定義による} \\
&= f\big(x_{\sigma(\tau(1))}, x_{\sigma(\tau(2))}, \ldots, x_{\sigma(\tau(n))}\big) && ;\ \text{積 } \sigma\tau \text{ の定義による} \\
&= \sigma f\big(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}\big) && ;\ PL \text{ から } PL \text{ への関数としての } \sigma \text{ の定義による} \\
&= \sigma(\tau f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) && ;\ PL \text{ から } PL \text{ への関数としての } \tau \text{ の定義による}
\end{aligned}$$

$\dashv$ (Claim 3.2.1)

次は， Vandermonde 多項式と呼ばれる多項式である [5)]．

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \tag{3.5}$$ x-3-1

cl-3-1

Claim 3.2.2 $\sigma \in S_n$ を互換とするとき，$\sigma\Delta(x_1, \ldots, x_n) = -\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ である．

$\vdash$ $\sigma = (i^*\ j^*)$ $(1 \leq i^* < j^* \leq n)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
(i^*\ j^*)\Delta(x_1, \ldots, x_n) = &\left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i,j \notin \{i^*, j^*\}}} (x_i - x_j) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq i < i^*} \underbrace{(x_{j^*} - x_i)(x_{i^*} - x_i)}_{= (x_{i^*} - x_i)(x_{j^*} - x_i)} \right) \cdot \\
&\left(\prod_{i^* < i < j^*} \underbrace{(x_i - x_{j^*})(x_{i^*} - x_i)}_{\substack{= -(x_i - x_{j^*})(-(x_{i^*} - x_i)) \\ = (x_i - x_{i^*})(x_{j^*} - x_i)}} \right) \cdot \left(\prod_{j^* < i \leq n} \underbrace{(x_i - x_{j^*})(x_i - x_{i^*})}_{= (x_i - x_{i^*})(x_i = x_{j^*})} \right) \cdot \underbrace{(x_{i^*} - x_{j^*})}_{= -(x_{j^*} - x_{i^*})} \\
= &-\Delta(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

---

5) (3.5) での $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ は i と j を $1 \leq i < j \leq n$ を満たす範囲で動かしたときの式 $(x_j - x_i)$ をすべてかけあわせることで得られる多項式である．この多項式は教科書の p.60 でも出てくる．たとえば，$n = 2$ のときには，$\Delta(x_1, x_2) = x_2 - x_1$ で， $n = 3$ のときには，$\Delta(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_2)$ である．

である． $\dashv$ (Claim 3.2.2)

以上の準備により，定理の証明ができる．背理法により示す．定理が成り立たないとすると，ある置換 σ が偶数個の互換の積 $\sigma_1 \cdots \sigma_{2k}$ としても，奇数個の互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_{2\ell+1}$ としても表現できる．このとき，Claim 3.2.1, Claim 3.2.2 により，

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, ..., x_n) &= (-1)^{2k}\Delta(x_1, ..., x_n) = \sigma_1 \cdots \sigma_{2k}\Delta(x_1, ..., x_n) \\ &= \tau_1 \cdots \tau_{2\ell+1}\Delta(x_1, ..., x_n) = (-1)^{2\ell+1}\Delta(x_1, ..., x_n) = -\Delta(x_1, ..., x_n) \end{aligned} \tag{3.7}$$

となり，矛盾である． □ (定理 3.2)

定理 3.2 により，以下の定義が可能になる:

$\sigma \in S_n$ のとき，σ の**符号** (signature) を

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{偶数個の互換 } \sigma_1,...,\sigma_{2k} \in S_n \text{ で } \sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_{2k} \\ & \text{となるものがあるとき;} \\ -1, & \text{奇数個の互換 } \tau_1,...,\tau_{2\ell+1} \in S_n \text{ で } \sigma = \tau_1 \cdots \tau_{2\ell+1} \\ & \text{となるものがあるとき.} \end{cases} \tag{3.8}$$

とする．σ が k 個の互換の積として表現できるとき，$sgn(\sigma) = (-1)^k$ である．

$n \times n$-行列 $A = [a_{i,j}]$ に対し，A の**行列式** (determinant) $\in \mathbb{R}$ を

$$\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(s)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \tag{3.9}$$ x-3-2

で定義する．A の行列式は，$|A|$, $det(A)$, $det[a_{i,j}]$ など表わす．$|A|$ と書くと絶対値の記号と同なので，正の値をとるように錯覚しやすいが，定義 (3.9) から明らかなように，$|A|$ は負の値もとりうる．

$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$ のときには，A の行列式を $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ とも表わす．

例 3.1 $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{12} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ の行列式を考えてみる．

$S_2 = \{\varepsilon_2, (1\ 2)\}$ で，$sgn(\varepsilon_2) = 1$, $sgn(1\ 2) = -1$ だから [6]，行列式の定義 (3.9) から，

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{12} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \tag{3.10}$$ x-3-2-0

[6] これは，正しくは，$sgn((1\ 20)) = -1$ と書かなくてはいけないが，括弧を一組省いて書いている．以下でも同様である．

である. □

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると，$det(A) = ad - bc$ と書けるが，$ad - bc$ は，第 1 回目の講義の演習問題 https://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-1.pdf の課題 $\boxed{2.}$ の答にも出てきた表現である．そこでの結果を，ここで導入した行列式を使って書き直してみると:

P-3-1

命題 3.3 $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{12} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ とすると，A が正則行列となるのは，$det(A) \neq 0$ となるちょうどそのときである．$det(A) \neq 0$ のときには，

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$ x-3-3

である. □

実は，もっと一般的に，任意の正方行列 A について，A が正則であることと，$det(A) \neq 0$ であることの同値性が示せる (後の講義でこれを示す)．(3.11) も任意の n に対する $n \times n$-行列いついての逆行列の式に一般化できる (教科書 [5], 定理 3.4.2 を参照).

S_n の要素の数は，$n!$ (n の階乗) である．指数関数的 (たとえば $n \mapsto 2^n$) な増加の仕方は日本語では「爆発的な増加」と表現されることがあるが [7)]，階乗は，指数関数より更に本質的に速く増加する関数である [8)]．有限集合 X の要素の数を $\#(X)$ と表わすことにすると，上でも見たように $\#(S_2) = 2! = 2$, $\#(S_3) = 3! = 6$, $\#(S_4) = 4! = 24$, $\#(S_5) =!5 = 120$, $\#(S_6) = 720$,... となって，n が少し大きくなると $\#(S_n)$ は急激に大きくなって，(3.9) を具体的に書き下すことは，現実的には不可能になってくる．$n = 3$ の場合では，これがまだかろうじてできる．

例 3.2 (a) $S_3 = \{\varepsilon_3, (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1), (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}$ である．sgn (符号) の定義から，$sgn(\varepsilon_3) = 1$ で，$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$, $(3\ 2\ 1) = (2\ 3)(1\ 3)$ だから，$sgn(1\ 2\ 3) = sgn(3\ 2\ 1) = 1$. また，$sgn(1\ 2) = sgn(2\ 3) = sgn(1\ 3) = -1$ である．

(b) 上の (a) と行列式の定義 (3.9) から，$A = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ とすると，

$$\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - (a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}) \tag{3.12}$$ x-3-4

---

7) 欧米の言語では「指数関数的」(英語では exponential) という形容詞が日常語でも用いられる．ポピュリズムに毒されてきっているアメリカやイギリスの政治家がこの形容詞を使うことはほぼない，と言っていいと思うが，ドイツの健康相が，この形容詞 (ドイツ語では exponentiell) を数学的な意味でも正しく使って COVID-19 の対策についての説明をしているのを，最近，ドイツのテレビのインタヴューで見た．

8) これに関しては，ここ (`https://fuchino.ddo.jp/obanoyama.html#20.07.26`) に書いたコメントも参照されたい.

である． □

参考文献

[1] 渕野 昌，2016 年 6 月 30 日の講義の板書のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/linalg-2-2016-06-30.pdf

[2] 渕野 昌，2016 年 7 月 7 日の講義の板書のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/linalg-2-2016-07-07.pdf

[3] 渕野 昌，2020 年 7 月 02 日の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-01-2020-07-02.pdf

[4] 渕野 昌，2020 年 7 月 09 日の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf

[5] 三宅 敏恒，線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ，培風館 (2008).

[6] Wikipedia, Parity of a permutation, https://en.wikipedia.org/wiki/Parity_of_a_permutation

[このテキストはほぼ完成版となっていますが．まだ細分の手直しや書き足しをする可能性もありまる．最新版をチェックしてください．最新版は，このファイルと同じ URL

https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-03-2020-07-16.pdf

から download できます．]