

補講 17日 (水) 5限 401

三 演習

復習 補題 3.1  $n \times n$  行列  $A$  に対し

$U^{-1}AU$  が  $A$  の対角化で

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_m \end{bmatrix} \text{ と表わし得る時,}$$

各  $\varepsilon_i$  は  $A$  の固有値で,  $U = [u_1 \dots u_m]$

とおく.  $u_i$  は  $A$  の固有値  $\varepsilon_i$  に対する

固有ベクトルである.

補題 3.2  $n \times n$  行列  $A$  に対し  $A$  の固有値

の列  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$  (ただし  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  の中には同じものがあってもよい)

と各  $i$  に対して  $A$  の  $\varepsilon_i$  に対する固有ベクトル  $u_i$  が

とあり,  $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$  として  $U$  が可逆なとき,

$U^{-1}AU$  は  $A$  の対角化で

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_m \end{bmatrix} \text{ と表わす.}$$

↑  
逆行列を掛ける

問 行列が可逆になるのはどんなときか?

補題 2.2  $n \times n$  行列  $B$  に対し以下は同値

(a)  $B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  が自明でない解 (つまり  $\alpha_1 \neq 0$  とする  $\alpha$  で,  $B\alpha = 0$  を  $\mathbb{R}^n$  満たすもの) を持つ

(b)  $B$  は 逆行列を持つ  
可逆 である

(c)  $\det(B) \neq 0$

補題 2.2 は次のように書きかえられる。

補題 2.2'  $n \times n$  行列  $A$  に対し次は同値

(a)  $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  の解は自明なものしかない

(b)  $A$  は可逆である (つまり逆行列を持つ)

(c)  $\det(A) \neq 0$



$u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^3$  とする。  $u_1, \dots, u_k$  が  
線形独立 かつ,  $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mathbb{R}$  に対し,  
 $\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \dots + \delta_k u_k = 0$  と仮定する

まず  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_k = 0$  と仮定すると,

補題(1)  $u_k$  が線形独立  $\Leftrightarrow u_k \neq 0$   
 $(k=1, 2)$

(2)  $u_1, \dots, u_k$  が線形独立ならば  $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$   
 $\dots u_k \neq 0$

(3)  $k=2$  のとき,  $u_1, u_2$  が線形独立  
 $\Rightarrow u_1$  は  $\delta u_2$  の形に表わされる。

(4)  $u_1, \dots, u_k$  が線形独立  
 $u_1, \dots, u_k$  をこの基底  
 部分基底とすると,  
 $u_1, \dots, u_k$  を基底と見

証明 (1):  $u_1 = 0$  ならば任意の  $\delta \in \mathbb{R}$   $\delta \neq 0$  に対して

$\delta u_1 = 0$  となるが,  $u_1$  は線形独立ではない

逆に  $u_1 \neq 0$  ならば  $\delta \in \mathbb{R}$  に対して  $\delta \neq 0$  ならば  $\delta u_1 \neq 0$

( $\neq 0$   $\delta \neq 0$  で  $\delta u_1 = 0$  だとすると両辺に  $\frac{1}{\delta}$  をかけると

$$u_1 = \left(\frac{1}{\delta}\right) \delta u_1 = \frac{1}{\delta} 0 = 0 \text{ と矛盾する。})$$

したがって,  $u_1$  はこの基底線形独立である。

(2): もし  $u_i$  のうち一つが 0 と等しいならば、簡単なため  
 $u_1 = 0$  とし,  $\delta_1 = 1, \delta_2 = \delta_3 = \dots = \delta_k = 0$  とすると,

$$\begin{array}{ccccccc} \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \dots + \delta_k u_k & = & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

したがって  $u_2, \dots, u_k$  は線形独立である。



(3):  $u_1, u_2$  が線形独立でないならば  $\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ?

(\*)  $\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 = 0$  とするのを仮定する。

このとき  $\delta_1 \neq 0$  と仮定する。このとき

(\*) の両辺に  $\frac{1}{\delta_1}$  をかけると

$$\frac{1}{\delta_1} (\delta_1 u_1) + \frac{1}{\delta_1} (\delta_2 u_2) = \frac{1}{\delta_1} 0$$

$$\left( \frac{\delta_1}{\delta_1} \right) u_1 + \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) u_2 = 0$$

$$1 u_1$$

$$u_2$$

$$u_1 = -\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right) u_2 \text{ となる。}$$

もし  $u_1 = \delta u_2$  と仮定すると、

$$\delta u_1 - \delta u_2 = 0$$

$$1 u_1 + (-\delta) u_2 = 0$$

と仮定すると  $u_1, u_2$  は線形独立でない。

(4): もし部分系  $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$  が線形独立でないとする。

$$\begin{bmatrix} d_{i_1} \\ \vdots \\ d_{i_k} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow d_{i_1} u_{i_1} + \dots + d_{i_k} u_{i_k} = 0$$

と仮定する。  $d_i = \begin{cases} d_{i_r} & ; i = i_r \text{ かつ } 1 \leq r \leq k \text{ と仮定} \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases}$

$$d_1 u_1 + d_2 u_2 + \dots + d_k u_k = 0$$

と仮定すると  $u_1, \dots, u_k$  は線形独立でない。

$A$  を  $n \times n$ -行列とし,  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$  とす

$A = [a_1 \dots a_n]$  とするとき

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} &= A \left( \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \underbrace{A \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\parallel d_1 a_1} + \underbrace{A \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\parallel d_2 a_2} + \dots + \underbrace{A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}}_{\parallel d_n a_n} \end{aligned}$$

と仮定する

補題 2.2' (a) の条件は,  $A = [a_1 \dots a_n]$

とすると,  $d_1 a_1 + d_2 a_2 + \dots + d_n a_n = 0$

と仮定する  $d_1, \dots, d_n$  は  $\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  と仮定される。

と仮定される。つまり

(a)  $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$  が線形独立

と仮定される



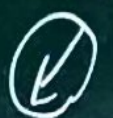
補題 4.2  $A$  を  $n \times n$  行列とて  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  を  $A$  の互いに異なる固有値とす。

$u_1, \dots, u_k$  をそれぞれ  $A$  の  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  に対する固有ベクトルとすると  $u_1, \dots, u_k$  は線形独立となる。

証明 (\*)  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0$  とす

最も左の固有値の  
対応する  $\alpha_i$  の最小値  
を  $\alpha_j$  とす

このとき  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$  とおこすことを示せばよい。そうであるとして、必要なら  $n$  文字の  $\lambda$  を加えて  $\alpha_1 \neq 0$  としてよい。  $u_1, \dots, u_k$  は固有ベクトルなので  $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, \dots, u_k \neq 0$  だが、  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  のうち  $\alpha_1$  は 0 でないものがあつたから、  $\alpha_2 \neq 0$  とする。  $\varepsilon_1$  と  $\varepsilon_2$  は異なるので、どちらかは 0 でない。一般性を失うことなく  $\varepsilon_1 \neq 0$  としつゝ、



補題 2.2 は次のように書きかえられる。

補題 2.2'  $n \times n$  行列  $A$  について次は同値

(a)  $A \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  の解は自明なものに過ぎる

(b)  $A$  は可逆である (つまり逆行列を持つ)

(c)  $\det(A) \neq 0$

(a')  $A = [a_1 \dots a_n]$  とし、  $a_1, \dots, a_n$  は線形独立



⑦

$$A(d_1 u_1 + d_2 u_2 + \dots + d_k u_k) = A0 = 0$$

$$d_1 A u_1 + d_2 A u_2 + \dots + d_k A u_k$$

$$d_1 \varepsilon_1 u_1 + d_2 \varepsilon_2 u_2 + \dots + d_k \varepsilon_k u_k$$

$$= n \text{ 個 } \frac{1}{\varepsilon_1} \text{ 個 } ( \varepsilon_1 \neq 0 \text{ なる } \varepsilon_1 \text{ あり } )$$

$$d_1 u_1 + \frac{d_2 \varepsilon_2}{\varepsilon_1} u_2 + \dots + \frac{d_k \varepsilon_k}{\varepsilon_1} u_k = 0$$

よって (\*) 成立

$$\left( \frac{d_2 \varepsilon_2}{\varepsilon_1} - d_2 \right) u_2 + \dots + \left( \frac{d_k \varepsilon_k}{\varepsilon_1} - d_k \right) u_k = 0$$

$$\text{よって } d_2 \dots d_k \text{ うち } 1 \text{ つは } 0 \text{ ではないが}$$

$$\text{たとえば } d_i \neq 0 \text{ とすると } \left( \frac{d_i \varepsilon_i}{\varepsilon_1} - d_i \right) = \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1} - 1 \right) d_i \neq 0$$

矛盾

(したがって  $u_1, \dots, u_k$  は  $\mathbb{Z}$  の基底 (基底) となる)

よって基底性より証明。□

補題 4.3  $A$  を  $n \times n$  行列とし  $A$  が  $n$  個の  
異なる固有値を持つとき、 $u_1, \dots, u_n$   
と  $v_1, \dots, v_n$  を  $A$  の  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  に対する  
固有ベクトルとすると、このとき  $U = [u_1, \dots, u_n]$   
とすると  $U$  は可逆となり、 $U^{-1}AU$  は  $A$  の  
対角化になる

証明 補題 4.2 から  $u_1, \dots, u_n$  は線形独立である  
補題 2.2 の拡張版から  $[u_1, \dots, u_n]$  は可逆である  
したがって補題 3.2 から  $U^{-1}AU$  は  $A$  の対角化である  $\square$