線形代数 2 — 2020年07月23日の講義 (第2クォーター4回目)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

(2020 年 08 月 06 日 10:49 版)

以下は，2020 年 07 月 23 日に実施の線形代数 2 のオンライン講義 (第 2 quarter 4 回目) です．行列式の基本性質とその証明が主な内容となっています．このテキストの内容は主に教科書の 第 3 章 「行列式」 の 3.2 と 3.3 の一部に対応します．いくつかの事項については，教科書とは若干違う記述の仕方で述べてあるところもあります．

このファイルの最新版は，https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-04-2020-07-23.pdf から download できます．

この講義のファイルは，講義の日時の前後で複数回修正加筆される可能性のある work in progress です[1]．

$n \times n$-行列 A に対し，A の**行列式** (determinant) $\in \mathbb{R}$ を

$$\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(s)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \tag{4.1}$$ x-4-0

で定義した．A の行列式は，$|A|$, $det(A)$, $det[a_{i,j}]$ などと表わす．

$\sigma \in S_n$ に対し，$sgn(\sigma)$ は σ の符号 (signature) でこれは，σ を互換の積で表したとき，その積に現れる互換の数が奇数なら -1 偶数なら 1 という値をとるのだった．

$|A|$ と書くと絶対値の記号と同なので，正の値をとるように錯覚しやすいが，定義 (4.1) から明らかなように，$|A|$ は負の値もとりうることに注意．

行列式の基本性質の一つとして，次の定理 4.1 を最初に示す．

任意の行列 A に対し ${}^tA$ で A の転置行列をあらわすのだった．A が $m \times n$-行列なら，${}^tA$ は $n \times m$-行列で，$A = [a_{i,j}]_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j < n}$, ${}^tA = [b_{i,j}]_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j < m}$ とすると，$1 \leq i \leq n$, $1 \leq j < m$ に対し，$b_{i,j} = a_{j,i}$ である．

[1] “Work in progress” という表現の由来については，たとえば https://en.wikipedia.org/wiki/Finnegans_Wake を参照してください．

定理 4.1 (教科書 [4] p.49 の定理 3.3.1) 任意の $n \times n$-行列 A に対し，$det({}^tA) = det(A)$ が成り立つ． P-4-a

まず，次の準備をする．

P-4-0

補題 4.2 （1）写像 $(\cdot)^{-1} : S_n \to S_n;\ \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ は 1-1 onto である[2)]．

（2） 任意の $\pi \in S_n$ に対し，写像 $(\cdot)\pi : S_n \to S_n;\ \sigma \mapsto \sigma\pi$ は 1-1 onto である．

証明． (1): S_n は有限集合だから，$(\cdot)^{-1}$ が 1-1 であることを示せばよい．$(\cdot)^{-1}$ が onto であることはこのことから従う．したがって，$\sigma\ \tau \in S_n$ を異る S_n の要素とするとき，$\sigma^{-1} \neq \tau^{-1}$ となることを示せばよい: もし $\sigma^{-1} = \tau^{-1}$ だったとすると，$\sigma = \sigma(\tau^{-1}\tau) = (\sigma\tau^{-1})\tau = (\sigma\sigma^{-1})\tau = \tau$ となってしまうから矛盾である．

(2): (1) と同様に示せる (演習問題)． □ (補題 4.2)

P-4-1

補題 4.3 （1）$\sigma \in S_n$ を互換とするとき，$\sigma^{-1} = \sigma$ である．

（2） $\sigma \in S_n$ が互換の積 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_\ell$ とあらわせるとき，$\sigma^{-1} = \sigma_\ell \cdots \sigma_2\sigma_1$ である．

証明． (1): この事実は直観的に明らかなものとして既に，第 2 回目の講義 [2] の補題 2.4 の証明で使っている．ここでは，厳密な証明を見てみることにする．

ある $1 \leq i < j \leq n$ に対し，$\sigma = (i\ j)$ とする．$\sigma\sigma = \varepsilon_n$ を言えばよい．$k \in \{1, ..., n\} \setminus \{i, j\}$ なら $\sigma\sigma(k) = \sigma(\sigma(k)) = \sigma(k) = k$ である．$k = i$ なら，$\sigma\sigma(i) = \sigma(\sigma(i)) = \sigma(j) = i$ で $k = j$ なら，$\sigma\sigma(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(i) = j$ である．したがって，すべての $k \in \{1, ..., n\}$ に対し $\sigma\sigma(k) = k$ だから，$\sigma\sigma = \varepsilon_n$ である．

(2): $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_\ell$ で $\sigma_1, ..., \sigma_\ell$ はすべて互換とすると，上の (1) により，

$$\sigma^{-1} = (\sigma_\ell)^{-1} \cdots (\sigma_2)^{-1}(\sigma_1)^{-1} = \sigma_\ell \cdots \sigma_2\sigma_1$$

である [3)]． □ (補題 4.3)

[2)] 写像 $f : X \to Y$ が 1-1 (1 対 1) であるとは，すべての異る $a, b \in X$ に対し，$f(a) \neq f(b)$ が成り立つことである．f が Y の上への写像である (onto であると略称する) とは，すべての $c \in Y$ に対し $f(a) = c$ となる $a \in X$ が存在することである．このことは，X の f による像 $f[X] = \{f(a) : a \in X\}$ について，$Y = f[X]$ が成り立つこと，と言い換えることもできる．

X が有限集合のときには，$f : X \to X$ が 1-1 なら，f は onto でもある．$\#(X) = n$ として ($\#(X)$ で X の要素の数をあらわす) f が 1-1 なら，$\#(f[X]) = n$ となるので，$f[X] \subseteq X$ だから，$f[X] = X$ となることがわかる．

X が無限集合のときには，$f : X \to X$ が 1-1 でも onto であるとは限らない．たとえば $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ n \mapsto 2n$ とすると，f は 1-1 だが onto ではない．

[3)] $\sigma^{-1} = (\sigma_\ell)^{-1} \cdots (\sigma_2)^{-1}(\sigma_1)^{-1}$ となることは，$(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{\ell-1}\sigma_\ell)((\sigma_\ell)^{-1}(\sigma_{\ell-1})^{-1} \cdots (\sigma_2)^{-1}(\sigma_1)^{-1}) =$
$\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{\ell-1}(\sigma_{\ell-1})^{-1} \cdots (\sigma_2)^{-1}(\sigma_1)^{-1} = \cdots = \sigma_1(\sigma_1)^{-1} = \varepsilon_n$,
$((\sigma_\ell)^{-1}(\sigma_{\ell-1})^{-1} \cdots (\sigma_2)^{-1}(\sigma_1)^{-1})(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{\ell-1}\sigma_\ell) = (\sigma_\ell)^{-1}(\sigma_{\ell-1})^{-1} \cdots (\sigma_2)^{-1}\sigma_2 \cdots \sigma_{\ell-1}\sigma_\ell = \cdots =$
$= \sigma_\ell(\sigma_\ell)^{-1} = \varepsilon_n$ によりよい．

自然数 $\ell \in \mathbb{N}$ に対し，ℓ の偶奇性 $sgn(\ell)$ を，

$$sgn(\ell) = \begin{cases} 1, & \ell \text{ が偶数のとき}; \\ -2, & \ell \text{ が奇数のとき} \end{cases} \tag{4.2}$$ x-4-1

として定義することにする．

P-4-2

補題 4.4 任意の $\sigma \in S_2$ に対し $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$ である．

証明． σ を互換の積 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_\ell$ とあらわすと, 補題 4.3, (2) により, σ^{-1} は $\sigma^{-1} = \sigma_\ell\cdots\sigma_2\sigma_1$ という互換の積であらわされる．したがって，

$$sgn(\sigma) = sgn(\ell) = sgn(\sigma^{-1})$$

である． ❑ (補題 4.4)

以上の準備で定理 4.1 の証明ができる．

定理 4.1 の証明: $A = [a_{i,j}]$, ${}^tA = [b_{i,j}]$ とすると，$b_{i,j} = a_{j,i}$ だから，

$$\begin{aligned} det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) b_{1,\sigma(1)} b_{2,\sigma(2)} \cdots b_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \underset{\substack{\parallel \\ sgn(\sigma)}}{sgn(\sigma^{-1})} a_{\sigma(1),\sigma^1(\sigma(1))}\, a_{\sigma(2),\sigma^{-1}(\sigma(2))} \cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}(\sigma(n))} = (*1) \end{aligned}$$

(補題 4.4 による)

$\sigma(1), ..., \sigma(n)$ は $1, ..., n$ の並べかえだから，順序を入れ替えると，

$$(*1) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = (*2)$$

したがって，補題 4.2, (1) により，

$$(*2) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = det(A)$$

である． ❑ (定理 4.1)

補題 4.5 (教科書 [4], p.45〜，定理 3.2.2, 3,2,3) A を $n \times n$-行列として $A = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$ とする P-4-3
[4)]．ただし，$\mathbb{z}_1, ..., \mathbb{z}_n$ は n-次元行ベクトルである．$A = [a_{i,j}]$ とすると，$1 \le i \le n$ に対し，$\mathbb{z}_i = [a_{i,1}\, a_{i,2}\ \cdots\ a_{i,n}]$ である．

[4)] 教科書 [4] では，単位行列を E („Einheit“ の E) で表わすなど，ドイツ語由来の mnemonics が多用されているので，それにあやかって，行列の行をドイツ語の行 „Zeile“ という単語の頭文字をとって $\mathbb{z}_i$ で表わしています．

（1） $\pi \in S_n$ を互換 $\pi = (k\ l)$ $(1 \leq k < \ell \leq n)$ とすると，$A' = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_{\pi(1)} \\ \vdots \\ \mathbb{z}_{\pi(n)} \end{bmatrix}$ として，
$det(A') = -det(A)$ が成り立つ．つまり正方行列の 2 つの行を入れかえると，行列式の絶対値は変らず，符号が入れ替わる．

（2） ある $1 \leq i \leq n$ に対し，$\mathbb{z}_i = \mathbb{z}_i^0 + \mathbb{z}_i^1$ のとき，

$$A_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_i^0 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$$

とすると，$det(A) = det(A_0) + det(A_1)$ が成り立つ．

（3） $c \in \mathbb{R}$ として，ある $1 \leq i \leq n$ に対し，

$$A'' = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ c\mathbb{z}_i \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$$

とするとき (つまり, A'' を，A の i-行を c 倍して得られる行列とするとき), $\det(A'') = c\det(A)$ が成り立つ.

証明． (1): $A = [a_{i,j}]$, $A' = [b_{i,j}]$ とすると，$b_{i,j} = a_{\pi(i),j}$ だから，

$$\begin{aligned} det(A') &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) b_{1,\sigma(1)} b_{2,\sigma(2)} \cdots b_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{\pi(1),\sigma(1)}\, a_{\pi(2),\sigma(2)} \cdots a_{\pi(n),\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{-sgn(\sigma\pi^{-1})}_{\overset{\shortparallel}{sgn(\sigma)}} a_{\pi(1),\sigma\pi^{-1}(\pi(1))}\, a_{\pi(2),\sigma\pi^{-1}(\pi(2))} \cdots a_{\pi(n),\sigma\pi^{-1}(\pi(n))} = (*3) \end{aligned}$$

($\pi^{-1} = \pi$ が互換であることに注意する)

$\pi(1), \ldots, \pi(n)$ は $1, \ldots, n$ の並べかえだから，$a_{\pi(1),\sigma\pi^{-1}(\pi(1))}\, a_{\pi(2),\sigma\pi^{-1}(\pi(2))} \cdots a_{\pi(n),\sigma\pi^{-1}(\pi(n))}$ を並べかえると，

$$(*3) = -\left(\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma\pi^{-1}) a_{1,\sigma\pi^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma\pi^{-1}(n)} \right) = (*4)$$

したがって 補題4.2, (2) により

$$(*4) = -\left(\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \right) = -det(A)$$

である．

(2): $\mathbb{z}_i^0 = [a_{i,1}^0\ a_{i,2}^0\ \cdots\ a_{i,n}^0]\ \mathbb{z}_i^1 = [a_{i,1}^1\ a_{i,2}^1\ \cdots\ a_{i,n}^1]$ として，

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i,\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots (a_{i,\sigma(i)}^0 + a_{i,\sigma(i)}^1)\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i,\sigma(i)}^0\cdots a_{n\sigma(n)} \ + \ \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i,\sigma(i)}^1\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= det(A_0) + det(A_1).
\end{aligned}$$

(3):

$$\begin{aligned}
det(A'') &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots ca_{i,\sigma(i)}\cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= c\left(\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{i,\sigma(i)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\right) = c\,det(A).
\end{aligned}$$

❏ (補題 4.5)

定理4.1により，補題 4.5での行列の行に関する行列式の性質は，行列の列に関する行列式の性質に翻訳することができる:

補題 4.6 (教科書 [4], p.45〜, 定理 3.3.3 の (1), (2), (3)) A を $n\times n$-行列として $A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}$ とする．ただし，$\mathbb{a}_1,\ldots,\mathbb{a}_n$ は n-次元列ベクトルである．$A = [a_{i,j}]$ とすると，$1 \le j \le n$ に対し，$\mathbb{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$ である． P-4-4

（1） $\pi \in S_n$ を互換 $\pi = (k\ l)$ $(1 \le k < \ell \le n)$ とすると，$A' = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_{\pi(1)} & \cdots & \mathbb{a}_{\pi(n)} \end{bmatrix}$ として，$det(A') = -det(A)$ が成り立つ．つまり正方行列の2つの列を入れかえると，行列式の絶対値は変らず，符号が入れ替わる．

（2） ある $1 \le j \le n$ に対し，$\mathbb{a}_j = \mathbb{a}_j^0 + \mathbb{a}_j^1$ のとき，

$$A_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & \mathbb{a}_j^0 & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix},\quad A_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & \mathbb{a}_j^1 & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}$$

とすると，$det(A) = det(A_0) + det(A_1)$ が成り立つ．

（3） $c \in \mathbb{R}$ として，ある $1 \le j \le n$ に対し，

$$A'' = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & c\,\mathbb{a}_j & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}$$

とするとき (つまり，A'' を， A の i-列を c 倍して得られる行列とするとき)，
$\det(A'') = c\det(A)$ が成り立つ． ❏

参考文献

[1] 渕野 昌，2020 年 7 月 02 日の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-01-2020-07-02.pdf

[2] 渕野 昌，2020 年 7 月 09 日の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf

[3] 渕野 昌，2020 年 7 月 16 日の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-03-2020-07-16.pdf

[4] 三宅 敏恒，線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ，培風館 (2008).

[このテキストはほぼ完成版となっていますが．後になって細分の手直しや書き足しをする可能性もあります．最新版の有無をチェックしてください．最新版は，このファイルと同じ URL

https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-04-2020-07-23.pdf

から download できます．]