

復習

補題 3.1 $U^{-1}AU$ が A の対角化である

($U^{-1}AU$ が対角行列になる, 212 とき)

$U^{-1}AU$ の対角成分は A の固有値である

$U = [u_1 \dots u_n]$ とすると u_i は $U^{-1}AU$ の

i 番目の $\underbrace{\text{固有値}}_{\substack{A \text{ の} \\ \epsilon_i}}$ の固有ベクトルになる, 212

($Au_i = \epsilon_i u_i$ となる, 213)

補題 3.2 (補題 3.1 の "逆") $m \times n$ 行列 A の固有値を重複をわけて

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ と仮定して n の固有ベクトル $u_1, \dots, u_m$ をとり $U = [u_1 \dots u_m]$

を作るとき、 A の n 個の固有ベクトル $u_1, \dots, u_n$ が可逆なら A は $U^{-1}AU$ と対角化できる。

補題 2.2' の 1 部 (前問より) $m \times n$ 行列 U が可逆 $\Leftrightarrow$

$U = [u_1 \dots u_m]$ とし $u_1, \dots, u_m$ が線形独立

定理 5.1 A が対角化できる $\Leftrightarrow A$ の m 個の固有ベクトル $u_1, \dots, u_m$ が線形独立となるものが存在する。
($m \times n$ 行列)

証明 " $\Rightarrow$ " A が対角化できると仮定すると、 $U^{-1}AU$ が対角行列になるものがあがり、
 $U^{-1}AU$ は可逆

補題 3.1 から、 $U = [u_1 \dots u_m]$ とすると、 $u_1, \dots, u_m$ は A の固有ベクトルである U は可逆なので、補題 2.2' から $u_1, \dots, u_m$ は線形独立である。

" $\Leftarrow$ " A の m 個の固有ベクトル $u_1, \dots, u_m$ が線形独立なものがあることは、 $U = [u_1 \dots u_m]$ は補題 2.2' から U は可逆で補題 3.2 から $U^{-1}AU$ は A の対角化である。 $\square$

補題 4.2 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ を A の互いに異なる固有値とすると $u_1, \dots, u_k$ を ε_i に対応する A の固有ベクトルとすると

(つまり、 $u_1, \dots, u_k \neq 0$ で $Au_i = \varepsilon_i u_i$ が $1 \leq i \leq k$ に対して成り立つ) $\Rightarrow$

→ $u_1, \dots, u_k$ は線形独立? 否

補題 4.3 $n \times n$ 行列 A が n 個の互いに異なる固有値を持つとは

$u_1, \dots, u_n$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $u_1, \dots, u_n$ とすると $U = [u_1, \dots, u_n]$ とし

A は $U^{-1}AU$ と対角化? $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{bmatrix}$ である。

補題 5.2 A を $n \times n$ 行列とし

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ を A の互いに異なる固有値とする。

各 $1 \leq i \leq k$ に対し, $u_{i,1}, \dots, u_{i,m_i}$ を固有値 ε_i に対応する A の固有ベクトルで $u_{i,1}, \dots, u_{i,m_i}$ は線形独立とする。このとき

$\underbrace{u_{1,1}, \dots, u_{1,m_1}}_{\varepsilon_1}, \underbrace{u_{2,1}, \dots, u_{2,m_2}}_{\varepsilon_2}, \dots, \underbrace{u_{k,1}, \dots, u_{k,m_k}}_{\varepsilon_k}$ は線形独立である。

補題 5.1 λ を行列 A の固有値とし, $u_1, \dots, u_m$ を A の λ に対応する固有ベクトルとすると $u_1, \dots, u_m$ の任意の線形結合 $c_1 u_1 + \dots + c_m u_m$ も (ゼロベクトルでない限り) A の λ に対応する固有ベクトルである。

補題 5.2 の証明

$$c_{11} u_{11} + \dots + c_{m_1} u_{1m_1} + c_{21} u_{21} + \dots + c_{2m_2} u_{2m_2} + \dots + c_{k1} u_{k1} + \dots + c_{km_k} u_{km_k} = 0 \quad (*)$$

と仮定する。このとき, $c_{i1} u_{i1} + \dots + c_{im_i} u_{im_i} = u_i$ とおくと

補題 5.1 により $u_i \neq 0$ なら, u_i は A の λ_i に対応する固有ベクトルである。

もし, $c_{11}, \dots, c_{km_k}$ のうち 0 でないものがあるならば, たとえば $c_{j0} \neq 0$ とすると, $u_{j1}, \dots, u_{jm_j}$ は線形独立なので $u_j \neq 0$ したがって, $(*)$ は $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ までのうちのいくつかの固有値の和となってしまうが, これは補題 4.2 に矛盾する。

したがって $c_{11} = \dots = c_{1m_1} = \dots = c_{k1} = \dots = c_{km_k} = 0$, よって $u_{11}, \dots, u_{1m_1}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{km_k}$ は線形独立である。

定理 5.3 $n \times n$ 行列 A が対角化可能である

$\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_k$ を A の互いに異なる (異なる) 固有値とし, λ_i に対応する A の固有ベクトルを

線形独立なものを $u_{i1}, \dots, u_{im_i}$ ととり,

$(**) m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ とできるとする。

証明 " $\Rightarrow$ ": 定理 5.1 より " $u_1, \dots, u_m$ を A の線形独立な固有ベクトルとすると, $u_1, \dots, u_m$ に含まれる各固有値に対応する固有ベクトルのグループも線形独立である)

" $\Leftarrow$ ": $u_{11}, \dots, u_{1m_1}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{km_k}$ は $(**)$ から n 個の A の固有ベクトルだが, これは, 補題 5.2 から (全体として) 線形独立である (定理 5.1 から A は対角化可能)。

例 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ は固有値 2 を持つ行列だが対角化可能であるか？
(のみ)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は A の固有ベクトル

互いに独立

演習問題

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の固有値を求め、これが対角化できるかどうかを調べる。