線形代数 2 — 2020年07月30日の講義 (第2クォーター５回目)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

(2020 年 08 月 06 日 10:51 版)

以下は，2020 年 07 月 30 日に実施の線形代数 2 のオンライン講義 (第 2 quarter ５回目) です．行列式の基本性質とその証明が主な内容となっています．このテキストの内容は主に教科書の 第 3 章 「行列式」 の 3.3 と 3.4 の一部に対応します．教科書で余因子展開として述べられていることは，教科書よりずっと詳しい説明がしてあります．いくつかの事項については，教科書の説明を補足したり，教科書とは若干違う記述の仕方で述べてあるところもあります．

このファイルの最新版は，https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-05-2020-07-30.pdf から download できます．

この講義のファイルは，講義の日時の前後で複数回修正加筆される可能性のある work in progress です．

前回の講義 [4] の補題4.5 を用いると, 次の行列式の性質が証明できる．特に, 補題 5.1, (1),(2) と 補題 5.1 を [4] の補題4.5 と組み合わせて使うと，例 5.1 でのような (手計算では実用的な) 行列式の計算法が確立できる．補題 5.1, (3) とその転置版である 補題 5.3, (3) は後で非常に重要な役割をはたすことになる．

P-5-a

補題 5.1 $n > 1$ として，A を $n \times n$-行列として，$A = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \mathbb{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}$ とする．$\mathbb{z}_i$, $1 \leq i \leq n$ は n-次の行ベクトルである．

(0) ある $1 \leq i \leq n$ に対して，$\mathbb{z}_i = \mathbb{0}$ なら，$det(A) = 0$ である．

(1) A が等しい 2 つの行を含むとき，つまり，ある $1 \leq i_0 < i_1 \leq n$ に対して $\mathbb{z}_{i_0} = \mathbb{z}_{i_1}$ となるとき，$det(A) = 0$ である．

（2） A' を A のある行に他の行の定数倍を加えることによって得られる行列とするとき，つまり，$A' = \begin{bmatrix} \mathbb{z}'_1 \\ \mathbb{z}'_2 \\ \vdots \\ \mathbb{z}'_n \end{bmatrix}$ として，ある $1 \leq i_0, i_1 \leq n$, $i_0 \neq i_1$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{z}'_{i_1} = \mathbb{z}_{i_1} + c\mathbb{z}_{i_0}$, また，すべての $i \in \{1, ..., n\} \setminus \{i_1\}$ に対し，$\mathbb{z}'_i = \mathbb{z}_i$ となっているとき，$det(A) = det(A')$ である．

（3） ある $1 \leq i \leq n$ と $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$ に対し，$\mathbb{z}_i = \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} c_k \mathbb{z}_k$ なら，$det(A) = 0$ である．

証明． (0): $\mathbb{z}_i = \mathbb{0}$ とすると，$\mathbb{z}_i = \mathbb{0} = 0\mathbb{0} = 0\mathbb{z}_i$ だから，[4] の補題 4.5, (3) により，

$$det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbb{z}_1 \\ \vdots \\ 0\mathbb{z}_i \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot det(A) = 0$$

である．

(1): A' を A の i_0-行と i_1-行を入れ替えることによって得られる行列とすると，[4] の補題 4.5, (1) により，$det(A') = -det(A)$ である．$\mathbb{z}_{i_0} = \mathbb{z}_{i-1}$ なら，$A' = A$ だから，$det(A) = -det(A)$ となり，したがって，$det(A) = 0$ である．

(2): i_0, i_1, c を (2) の主張でのようにとる．A'' を A の i_1-行を $\mathbb{z}_{i_1}$ で置き換えて得られる行列とすると，[4] の補題 4.5, (2) と (3) により，

$$det(A') = det(A) + c\,det(A'')$$

となるが，(1) により $det(A'') = 0$ なので，$det(A') = det(A)$ である．

(3): A' を A の i-行を $\mathbb{0} = \mathbb{z}_i - \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} c_k \mathbb{z}_k$ で置き換えて得られる行列とすると，(2) (の繰り返し適用) により，$det(A) = det(A')$ である．一方， A' の i-行は $\mathbb{0}$ だから，(0) により，$det(A') = 0$ がわかる．したがって，$det(A) = 0$ である． ❏ (補題 5.1)

$n \times n$-行列 A が**上三角行列** (かみさんかくぎょうれつ，または，うえさんかくぎょうれつ，upper triangular matrix) であるとは，$A = [a_{i,j}]$ として，すべての，$1 \leq j < i \leq n$ に対して，$a_{i,j} = 0$ となることである．

P-5-a-0

補題 5.2 正方行列 A が上三角行列のとき，$det(A)$ は A の対角成分の積に等しい [1]．

---

[1] つまり A を $n \times n$-行列で $A = [a_{i,j}]$ かつ，すべての，$1 \leq j < i \leq n$ に対して，$a_{i,j} = 0$ とするとき，$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ である．

証明． A を $n\times n$-行列として $A=[a_{i,j}]$ とする．$det(A)=\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\,a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ だった．$\sigma\in S_n$ が単位置換 ε_n と異なるときには，$1\leq i\leq n$ で $\sigma(i)<i$ となるものがあるから (演習)，この i に対し，$a_{i,\sigma(i)}=0$ である．したがって $det(A)$ の計算での "$\sum_{\sigma\in S_n}$ ..." で $\sigma=\varepsilon_n$ の項だけが残るが $sgn(\varepsilon_n)=1$ で $\varepsilon_n(i)=i$ $(1\leq i\leq n)$ だから，$det(A)=a_{1,1}\,a_{2,2}\cdots a_{n,n}$ である．

□ (補題 5.2)

行列式の具体的な計算は，多くの場合，前回の講義 [4] の補題 4.5 と，上の 2 つの補題を組み合わせて使うことで実行できる．

Ex-5-0

例 5.1

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9\\ 1 & 3 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 9 & 7\\ 0 & 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9\\ 0 & 0 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} && \begin{array}{l}\text{2 行目から 1 行目をひき，}\\ \text{3 行目から 1 行目をひく (補題 5.1, (2))}\end{array}\\
&=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9\\ 0 & 2 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} && \text{2 行目と 4 行目の入れ替え ([4] の補題 4.5, (1))}\\
&=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9\\ 0 & 2 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} && \text{4 行目に 3 行目をたす (補題 5.1, (2))}\\
&=-(1\times 2\times 4\times(-4))=32 && \text{(補題 5.2)}
\end{aligned}
$$

前回の講義 [4] の定理 4.1 で見たように，行列式の計算では，行と列の役割を入れ替えても行列式の値は変らないから，補題 5.1 と補題 5.2 は以下のように翻訳することができる:

P-5-a-1

補題 5.3 $n>1$ として，A を $n\times n$-行列として，$A=\begin{bmatrix}\mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \cdots & \mathbb{a}_n\end{bmatrix}$ とする．

(0) ある $1\leq j\leq n$ に対して，$\mathbb{a}_j=\mathbb{0}$ なら，$det(A)=0$ である．

(1) A が等しい 2 つの列を含むとき，つまり，ある $1\leq j_0<j_1\leq n$ に対して $\mathbb{a}_{j_0}=\mathbb{a}_{j_1}$ となるとき，$det(A)=0$ である．

(2) A' を A のある列に他の列の定数倍を加えることによって得られる行列とするとき，つまり，$A'=\begin{bmatrix}\mathbb{a}'_1 & \mathbb{a}'_2 & \cdots & \mathbb{a}'_n\end{bmatrix}$ として，ある $1\leq j_0,j_1\leq n$, $j_0\neq j_1$ と $c\in\mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{a}'_{j_1}=\mathbb{a}_{j_1}+c\mathbb{a}_{j_0}$，また，すべての $j\in\{1,...,n\}\setminus\{j_1\}$ に対し，$\mathbb{a}'_j=\mathbb{a}_j$ となっているとき，$det(A)=det(A')$ である．

（3） ある $1 \le j \le n$ と $c_\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{1,...,n\} \setminus \{j\}$ に対し，$\mathbb{a}_j = \sum_{\ell \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} c_\ell \mathbb{a}_\ell$ なら，$det(A) = 0$ である． ❏

$n \times n$-行列 A が**下三角行列** (しもさんかくぎょうれつ，または，したさんかくぎょうれつ，lower triangular matrix) であるとは，$A = [a_{i,j}]$ として，すべての，$1 \le i < j \le n$ に対して，$a_{i,j} = 0$ となることである．

以下の補題も，補題 5.2 を前回の講義 [4] の定理 4.1 で "翻訳" することで得られる．

P-5-a-2

補題 5.4 正方行列 A が下三角行列のとき，$det(A)$ は A の対角成分の積に等しい．

証明． A が下三角行列なら ${}^tA$ は上三角行列である．前回の講義 [4] の定理 4.1 により，$det(A) = det({}^tA)$ だが，補題 5.2 より, $det({}^tA)$ は ${}^tA$ の対角成分の積に等しい．ここで $det(A)$ の対角成分は ${}^tA$ の対角成分と一致することに留意すると，$det(A)$ は A の対角成分の積に等しいことが結論できる． ❏ (補題 5.4)

以下で，$n > 1$ として，$n \times n$-行列の行列式の計算を $(n-1) \times (n-1)$-行列の行列式の計算に帰着させることを考える．このために，まず次を示す (これは先々週の宿題の演習問題 ([3] の) に含まれていたものである．)．

P-5-0

補題 5.5 $n > 1$ で $A = [a_{i,j}]$ を $n \times n$-行列として，$(n-1) \times (n-1)$-行列 A_0 を，

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

と定義する (A_0 は A から第 1 行と第 1 列を取り除いて得られる行列である)．

（1） すべての $1 < j \le n$ に対し，$a_{1,j} = 0$ となるとき，$det(A) = a_{1,1} det(A_0)$ である．

（2） すべての $1 < i \le n$ に対し， $a_{i,1} = 0$ となるとき，$det(A) = a_{1,1} det(A_0)$ が成り立つ．

証明． (1): $\sigma \in S_n$ に対し，$\sigma(1) \ne 1$ なら，$a_{1,\sigma(1)} = 0$ である．このことに留意すると，

$$\begin{aligned} det(A) &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= a_{1,1} \textstyle\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} sgn(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= a_{1,1} \textstyle\sum_{\sigma \in S_{n-1}} sgn(\sigma) a_{1+1,\sigma(1)+1}\ a_{2+1,\sigma(2)+1}\ \cdots\ a_{n,\sigma(n-1)+1} \\ &= a_{1,1} det(A_0) \end{aligned}$$

である．最後の 2 つの行の式の同等性は，A_0 の (i,j) 成分が，A の $(i+1, j+1)$ 成分であることから従う．

(2): ${}^tA$ は (1) の条件を満たすものになっていて，その $(1,1)$-成分は $a_{1,1}$ で，${}^tA$ に対し，(a) での A_0 に対応するのは ${}^t(A_0)$ である．したがって，第４回の講義 [4] の定理 1 から，$det(A) = det({}^tA) = a_{1,1}det({}^t(A_0)) = a_{1,1}det(A_0)$ である． □ (補題 5.5)

$n > 1$ として，

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n,1} \end{bmatrix}$$

だから，

$$\mathbb{a}_1^1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{a}_1^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbb{a}_1^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n,1} \end{bmatrix}$$

として，

$$A_k = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1^k & a_2 & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix} \quad (1 \leq k \leq n)$$

とすると．前回の講義 [4] の補題 4.6, (2) (繰り返しの適用) により，

$$det(A) = det(A_1) + \det(A_2) + \cdots det(A_n) \tag{5.1}$$ x-5-a

である．

$A_k = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_1^k \\ \mathbb{z}_2^k \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n^k \end{bmatrix}$ とする．$\sigma_k \in S_n$ を $\sigma = (1 \ \ k \ \ k-1 \ \ k-2 \cdots \ 2) = (k \ \ k-1 \ \cdots \ 2 \ \ 1)$ とする．

$$sign(\sigma) = (-1)^{n+1} \tag{5.2}$$ x-5-0

であることに注意する．$A'_k = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_{\sigma(1)}^k \\ \mathbb{z}_{\sigma(2)}^k \\ \vdots \\ \mathbb{z}_{\sigma(n)}^k \end{bmatrix}$ とする．つまり，$A'_k = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_k^k \\ \mathbb{z}_1^k \\ \vdots \\ \mathbb{z}_{k-1}^k \\ \mathbb{z}_{k+1}^k \\ \vdots \\ \mathbb{z}_n^k \end{bmatrix}$ である．A'_k は，補題 5.5, (2) での A のような行列になっている．この補題での A に対する A_0 に対応するのは，

A_k (またな同じことだが，ここで考えている行列 A) から k-行目と 1-列目を取り除いて得られる $(n-1)\times(n-1)$ 行列である．この行列を $A_{k,1}$ とよぶことにする．A'_k の $(1,1)$-成分は $a_{k,1}$ だから，補題 5.5, (2) により，$det(A'_k) = a_{k,1}det(A_{k,1})$ である．したがって，前回の講義 [4] の補題 4.5, (1) と (5.2) により，$det(A_k) = (-1)^{k+1}det(A'_k)$ だから，$\det(A_k) = (-1)^{k+1}a_{k,1}\det(A_{k,1})$ となることがわかる．このことと，(5.1) から，

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{1,1}det(A_{1,1}) - a_{2,1}det(A_{2,1}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n,1}det(A_{n,1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k,1}det(A_{k,1}) \end{aligned} \tag{5.3}$$
x-5-1

である．

次に，$1 < \ell \leq n$ として，$\tau \in S_n$ を $\tau = (\ell \;\; \ell-1 \;\; \cdots \;\; 2 \;\; 1)$ とする．

$$A'' = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_{\tau(1)} & \mathbb{a}_{\tau(2)} & \cdots & \mathbb{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$
x-5-2

とすると，前回の講義 [4] の補題 4.6, (1) により，$det(A) = (-1)^{\ell+1}det(A'')$ である．A'' の第 1 列は $\mathbb{a}_\ell$ で，A'' から k-行と 1 列を取り除いて得られる $(n-1)\times(n-1)$ 行列は A から k-行と ℓ-列を取り除くことで得られる $(n-1)\times(n-1)$ 行列に等しい．この行列を $A_{k,\ell}$ と書くことにして，A'' に (5.3) を適用すると，任意の $1 \leq \ell \leq n$ に対し，等式

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{\ell+1}(a_{1,\ell}det(A_{1,\ell}) - a_{2,\ell}det(A_{2,\ell}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n,\ell}det(A_{n,\ell}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(-1)^{\ell+1}a_{k,\ell}\,det(A_{k,\ell}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+\ell}a_{k,\ell}\,det(A_{k,\ell}) \end{aligned} \tag{5.5}$$
x-5-3

が得られる ($\ell = 1$ のときには，この等式は (5.3) と等しいことに注意)．この式を，(行列式 $det(A)$ の ℓ-列に関する) **ラプラス展開** (または，**余因子展開**) (Laplace expansion, co-factor expansion) とよぶ [2)]．

前回の講義 [4] の定理 4.1 により，行列式の計算は行と列の役割を入れ替えても成り立つので，(5.5) と，このことから，任意の $1 \leq k \leq n$ に対し，等式

$$det(A) = \sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{k+1}(-1)^{\ell+1}a_{k,\ell}\,det(A_{k,\ell}) = \sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{k+\ell}a_{k,\ell}\,det(A_{k,\ell}) \tag{5.6}$$
x-5-4

[2)] ラプラス (Pierre-Simon Laplace, 1749 (寛延 2 年) — 1827 (文政 10 年) はフランスの数学者，物理学者である．ラプラスは古典物理学の範疇で議論して，宇宙のすべての物質の状態のパラメタを知っている知性があったとすれば，この知性は宇宙の未来の状態をすべて計算することができて，この知性にとって，不定性は全く存在しないものとなる，という考えを表明しているが，この考え方は後に「ラプラスの悪魔」(Laplace's damon) と呼ばれるようになるものである．量子物理学的考察からは，ラプラスの悪魔の存在を仮想することは，現代物理学とは相容れないように思えるが，そうだとしても，この考え方，ないし思考実験は，物理学や物理哲学で重要なものである．

が成り立つことがわかる．この式を，(行列式 $det(A)$ の k-行に関する) **ラプラス展開** (または，**余因子展開**) (Laplace expansion, co-factor expansion) とよぶ．

例 5.2

行列 $A = \begin{bmatrix} -8 & -7 & -6 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ の行列式に (5.5) の $\ell = 2$ での場合を適用すると，

$$\begin{vmatrix} -8 & -7 & -6 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{2+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -8 & -6 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -6 & -5 \\ -4 & -2 & -1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{4+2} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -6 & -5 \\ -4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

参考文献

[1] 渕野 昌，2020 年 7 月 09 日 (2 回目) の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf

[2] 渕野 昌，2020 年 7 月 16 日の講義 (3 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-03-2020-07-16.pdf

[3] 渕野 昌，2020 年 7 月 16 日の講義 (3 回目) の宿題の課題，解答例と解説
https://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-3.pdf

[4] 渕野 昌，2020 年 7 月 23 日の講義 (4 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-04-2020-07-23.pdf

[5] 三宅 敏恒，線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ，培風館 (2008).

[このテキストはほぼ完成版となっていますが．後で細分の手直しや書き足しをしている可能性もあります．最新版の有無をチェックしてください．最新版は，

https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-05-2020-07-30.pdf

から **download** できます．]