以下 簡単のために2次元空間に限定して考える。$\underbrace{\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2}_{\text{線形写像（線形変換）}}$ とする。

φ はある 2×2 行列 A で表現できる

つまり $\overbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}^{\text{すべての}} \in \mathbb{R}^2$ に対して、

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

となるように A がとれる このような A は1意に決まり、

$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = a_1$　$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = a_2$ とし　$A = [a_1\ a_2]$

とすればよい。逆に 2×2 行列 A に対して

$\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ; \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \longmapsto A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ とすると φ_A は

線形写像になる。

線形写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が 対角行列 $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$

で表現されているときには、φ は（原点を中心として）ベクトルを

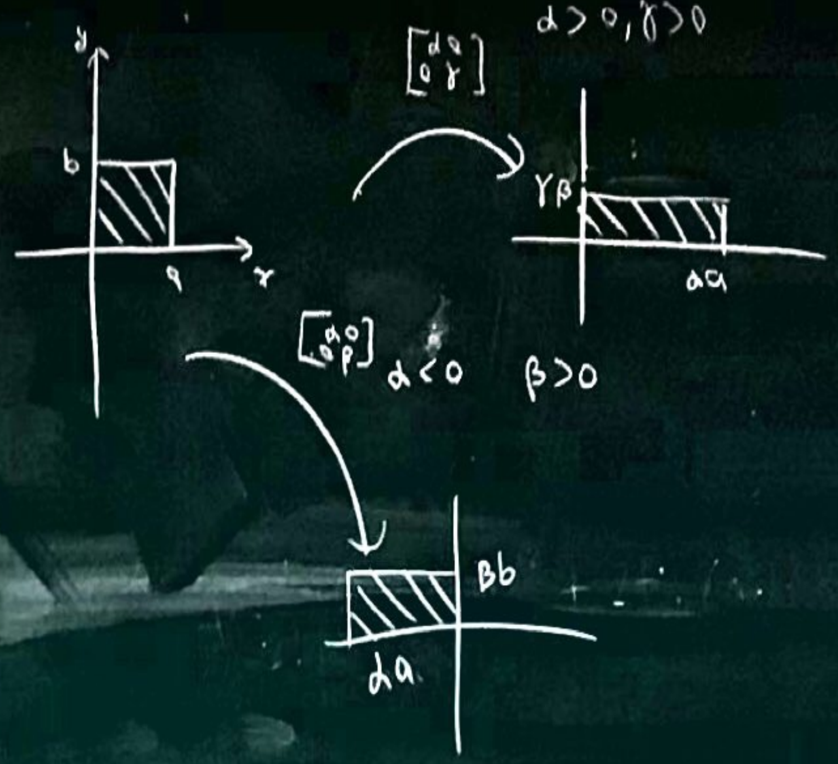
x 軸方向に α 倍で拡大/縮小して

y 〃 〃 δ 〃 する。

（α）または（δ）倍して

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \delta b \end{bmatrix}$$

である。ただし α または δ が負のときには、y 軸あるいは x 軸に関して鏡像変換する。



A が $P^{-1}AP$ と対角化されたときには

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ として、

ここで α と γ は A の固有値で

$P = [p_1\ p_2]$

p_1 と p_2 は A のそれぞれ α と γ に対する固有ベクトルになっている

$\boxed{C = P^{-1}AP}$ とおくと

$$\varphi_C = \varphi_{P^{-1}AP} = \varphi_{P^{-1}} \circ \varphi_A \circ \varphi_P$$

$$= (\varphi_P)^{-1} \circ \varphi_A \circ \varphi_P$$

$PCP^{-1} = A$

だから、$\varphi_A = \varphi_P \circ \varphi_C \circ \varphi_{P^{-1}}$

である。

$A = PCP^{-1}$ と書けて C は対角行列

P は ある"良い"性質を持った行列 となるような

たとえば 直交 行列"

A が何になるかをしらべたい.

線形 変換 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が 直交変換とは

すべての $u, v \in \mathbb{R}^2$ に対して

内積 $u \cdot v = \varphi(u) \cdot \varphi(v)$ となること. 内積

(＊)

特に $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$ だったので直交変換は

2つの直交するベクトルを 2つの 直交するベクトルに移す

補題 6.1 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を直交変換とすると,

(1) $|\varphi(u)| = |u|$

(2) $u \perp v \Leftrightarrow \varphi(u) \perp \varphi(v)$

$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ $\left(u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right)$ $= \sqrt{u \cdot u}$

(3) u と v のなす角 $=$ $\varphi(u)$ と $\varphi(v)$ なす角

証明 (1): $u \cdot u \underset{(＊)により}{=} \varphi(u) \cdot \varphi(u)$

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\varphi(u) \cdot \varphi(u)} = |\varphi(u)|$$

(2) $\Rightarrow$: はすでに見た $\Leftarrow$: $u \not\perp v \Leftrightarrow u \cdot v \neq 0$

により (＊) $\varphi(u) \cdot \varphi(v) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(u) \not\perp \varphi(v)$

(3) θ を u と v のなす角とすると, $(u \neq 0 \quad v \neq 0)$

1st quarter の
定理 4.8

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos\theta$$

を使うと

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{\varphi(u) \cdot \varphi(v)}{|\varphi(u)|\,|\varphi(v)|} = \cos\theta'$$

θ' : $\varphi(u)$ と $\varphi(v)$ のなす角. ∎

補題 6.2 φ を直交変換とし T を φ の表現行列とする

(a) $T = [t_1\ t_2]$ とおくと (1) $|t_1| = |t_2| = 1$ で (2) $t_1 \perp t_2$

(b) 逆に $T = [t_1\ t_2]$ が (1), (2) を満たすなら φ_T は直交変換である。

証明 (a) : $\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = t_1$　$\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = t_2$

なので 補題 6.1 (1) により $|t_1| = |t_2| = 1$

$$\left|\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right| = 1$$

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ だから 6.1 (2) により $t_1 \perp t_2$ である.

(b) $T = [t_1, t_2]$ で t_1 と t_2 が (1) と (2) を満たすとする.

$u, v \in \mathbb{R}^2$　$u = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$ とおくと, $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$

$$\|$$

一方 $\varphi_T(u) \cdot \varphi_T(v) = [t_1\ t_2]u \cdot [t_1\ t_2]v$　$u_1v_1 + u_2v_2$

$$= (u_1t_1 + u_2t_2) \cdot (v_1t_1 + v_2t_2)$$

$$= u_1v_1\,\underbrace{t_1 \cdot t_1}_{=1} + u_1v_2\,\underbrace{t_1 \cdot t_2}_{=0} + u_2v_1\,\underbrace{t_2 \cdot t_1}_{=0} + u_2v_2\,\underbrace{t_2 \cdot t_2}_{=1}$$

∎

T が直交変換の表現行列のとき、

T を直交行列とよぶ　つまり、補題6.2から

(**) $T=[\boldsymbol{t}_1\ \boldsymbol{t}_2]$ が直交行列 $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{t}_1|=|\boldsymbol{t}_2|=1$　$\boldsymbol{t}_1 \perp \boldsymbol{t}_2$

である

補題6.3 T は直交行列 $\Leftrightarrow$

$${}^tT\,T = E$$

特に直交行列 T は可逆で $T^{-1}={}^tT$ である。

証明　T を直交行列として $T=[\boldsymbol{t}_1\ \boldsymbol{t}_2]$ とおく

$${}^tT = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{t}_1 \\ {}^t\boldsymbol{t}_2 \end{bmatrix}$$ だから、

$$\left\{\begin{array}{l}
{}^tT\,T \text{ の } (1,1) \text{ 成分} = {}^t\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{t}_1 = 1 \\
{}^tT\,T \text{ の } (1,2) \text{ 成分} = {}^t\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{t}_2 = 0 \\
{}^tT\,T \text{ の } (2,1) \text{ 成分} = {}^t\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t}_2\cdot\boldsymbol{t}_1 = 0 \\
{}^tT\,T \text{ の } (2,2) \text{ 成分} = {}^t\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{t}_2\cdot\boldsymbol{t}_2 = 1
\end{array}\right.$$

したがって ${}^tT\,T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である。

逆に ${}^tT\,T = E$ とおくと $\{$ により

$T=[\boldsymbol{t}_1\ \boldsymbol{t}_2]$ として

$\boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{t}_1 = 1$　$\boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{t}_2 = 0$ (i.e. $\boldsymbol{t}_1 \perp \boldsymbol{t}_2$) である

$\boldsymbol{t}_2\cdot\boldsymbol{t}_2 = 1$

したがって (**) により T は直交行列

定理 6.4

Aが(実)対称行列のとき，Aは直交行列で

成分は全部実数

対角化できる．

証明は 複素数を成分とする行列やベクトルの理論での

ギロンを経由して行う．⊠

問題 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ を直交行列により対角化せよ！

$n \times n$ 行列 Aが 対称行列であるとは

${}^tA = A$ となること

例

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ …