線形代数 2 — 2020年08月06日の講義 (第2クォーター６回目)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

(2020 年 08 月 09 日 22:43 版)

以下は，2020 年 08 月 06 日に実施の線形代数 2 のオンライン講義 (第 2 quarter ６回目) です．行列式の基本性質とその証明の続き (a) と，行列式の幾何学的な意味の説明 (b) が主な内容です．

(b) は教科書では全く触れていない話題です．教科書 [6] は純粋に代数的な視点から書かれていて，今回の (b) のハイライトとなる教科書での定理 3.3.4 (p.51, 以下の 定理6.2) の証明 (以下でも教科書にある証明をもう少し詳しく述べます) のような，目をみはるような，エレガントな代数的な議論がいくつも見出せます[1)]，

一方，この教科書は幾何学的な理解を助ける記述が全くといっていいほど欠落している，という特徴もあります．この場合,「特徴」ではなく「欠点」と言うべきなのかもしれませんが，この教科書の代数的な記述の冴えのため，あえて欠点とは言わず,「特徴」としておいていいようにも思えるのです．しかし，講義では，代数的な側面も少し補っておこうと思います．

以下では，このことも含めていくつかの事項については，教科書の説明を補足したり，教科書とは若干違う記述の仕方で述べてあるところもあります．

このファイルの最新版は，https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-06-2020-08-06.pdf から download できます．

---

1) Paul Erdős (ポール・エルデシュ 1913 – 1996, 20 世紀の代表的な数学者の一人) は，数学の一般講演で,「天国には数学のエレガントな証明がすべて書かれた本があって，数学者がすばらしい証明を思いつくのは，実はこの本に書いてあることを何かの拍子に垣間見るからだ」という話をよくしました [2)]．教科書にある定理 3.3.4 の証明も，そんな,「天国の本」に書いてあるような証明だと思います．

2) この「天国の本」に関連した一般向けの講義を昔にしたことがありました．そのときの講義のレジュメ (https://fuchino.ddo.jp/misc/wiki-heaven.pdf) があります．まだタブレットが発明される前の時代の講義だったので,「コンピュータで本を読むときには寝転がって読めないのが欠点だ」というようなことが書いてありますが，そのことを除けば現代にも通用する議論となっていると思います．

この講義のファイルは，講義の日時の前後で複数回修正加筆される可能性のある work in progress です．

A, B, C, D をそれぞれ $m \times m$-行列，$m \times n$-行列，$n \times m$-行列 $m \times m$-行列とするとき，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

で，これらの行列をこのように組み合わせて得られる $(m+n) \times (m+n)$-行列をあらわすことにする．特に $m = n$ のときには，A, B, C, D はすべて $n \times n$-行列で，$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ は $2n \times 2n$-行列となる．

補題 6.1 (教科書 [6] p.51, 定理 3.3.4) P-6-0

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & Z_1 \\ Z_2 & B \end{bmatrix}$ とする．ここに，ある $m, n \geq 1$ に対し，A は $m \times m$-行列，B は $n \times n$-行列，Z_1 は $m \times n$-行列，Z_2 は $n \times m$-行列で，Z_1 と Z_2 のうち少なくとも片方は零行列とする[3)]．このとき，$det(\tilde{A}) = \det(A) \times \det(B)$ が成り立つ．

証明． Z_2 が零行列の場合を考える (Z_1 が零行列の場合も同様に証明できる)．$\tilde{A} = [\tilde{a}_{i,j}]$, $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ とする．$\sigma \in S^{m+n}$ が $\sigma[\{1, ..., m\}] \neq \{1, ..., m\}$ となっていれば [4)]，$i \in \{1, ..., m\}$ で $\sigma(i) \notin \{1, ..., m\}$ となるものがあるが，この i に対し，$\tilde{a}_{i,\sigma(i)}$ は Z_2 の成分となるから，$\tilde{a}_{i,\sigma(i)} = 0$ である．したがって，このような σ に対し，$\tilde{a}_{1,\sigma(1)} \cdot \tilde{a}_{2,\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot \tilde{a}_{m+n,\sigma(m+n)} = 0$ である．

このことから，

$$\begin{aligned}
(6.1)\quad \det(\tilde{A}) &= \sum_{\substack{\sigma \in S^{m+n} \\ \sigma[\{1,\ldots,m\}]=\{1,\ldots,m\}}} sgn(\sigma)\tilde{a}_{1,\sigma(1)} \cdot \tilde{a}_{2,\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot \tilde{a}_{m+n,\sigma(m+n)} && \text{x-6-0} \\
&= \sum_{\tau \in S^m,\, \mu \in S^n} sgn(\tau \dot{+} \mu)\tilde{a}_{1,(\tau\dot{+}\mu)(1)} \cdot \tilde{a}_{2,(\tau\dot{+}\mu)(2)} \cdot \cdots \cdot \tilde{a}_{m+n,(\tau\dot{+}\mu)(m+n)} && \cdots\ (*) \\
&= \sum_{\tau \in S^m,\, \mu \in S^n} sgn(\tau)sgn(\mu)a_{1,\tau(1)} \cdot a_{2,\tau(2)} \cdot \cdots \cdot a_{m,\tau(m)} \cdot b_{1,\mu(1)} \cdot \cdots \cdot b_{n,\mu(n)} && \cdots\ (**) \\
&= \sum_{\tau \in S^m} sgn(\tau)a_{1,\tau(1)} \cdot a_{2,\tau(2)} \cdot \cdots \cdot a_{m,\tau(m)} \\
&\quad + \sum_{\mu \in S^n} sgn(\mu)b_{1,\mu(1)} \cdot b_{2,\mu(2)} \cdot \cdots \cdot b_{n,\mu(n)} \quad = \quad det(A) + det(B)
\end{aligned}$$

---

3) $m \times n$-行列 O が零行列であるとは，O のすべての成分が 0 であることだった．

4) 関数 $f : X \to Y$ と $X' \subseteq X$ に対し，$f[X']$ で，X' の f による像 $\{f(x) : x \in X'\}$ をあらわす．$f[X'] \subseteq Y$ である．

である．ここに，$\tau \in S^m$, $\mu \in S^n$ に対し，$\tau \dotplus \mu : \{1, ..., m+n\} \to \{1, ..., m+n\}$ を，$k \in \{1, ..., m+n\}$ に対し，

$$(6.2) \quad (\tau \dotplus \mu)(k) = \begin{cases} \tau(k), & 1 \le k \le m \text{ のとき;} \\ \mu(k-m)+m, & m < k \le m+n \text{ のとき} \end{cases}$$ x-6-1

となるもの, として定義する[5]．この定義から $\tau \dotplus \mu \in S^{m+n}$ で, $(\tau \dotplus \mu)[\{1, ..., m\}] = \{1, ..., m\}$ である．逆に，$\sigma \in S^{m+n}$ が $\sigma[\{1, ..., m\}] = \{1, ..., m\}$ を満たすとき，$\tau = \sigma \restriction \{1, ..., m\}$ として[6]，$\mu : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ を $k \in \{1, ..., n\}$ に対し，

$$(6.3) \quad \mu(k) = \sigma(m+k) - m$$

となるもの，として定義すると，$\tau \in S^m$, $\mu \in S^n$ で，$\sigma = \tau \dotplus \mu$ が成り立つ．

(6.1) の $(*)$ はこのことから従う．$(**)$ は $\tau \dotplus \mu$ の定義 (6.2) によりよい． ❏ (補題 6.1)

定理 6.2 (教科書 [6], p.52 定理 3.3.5) A と B を $n \times n$-行列とするとき，$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$ が成り立つ． P-6-1

証明． $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & O_n \\ -E_n & B \end{bmatrix}$ とする．ここに，E_n は $n \times n$-サイズの単位行列で，O_n は $n \times n$-サイズの零行列である．補題 6.1 により，

$$(6.4) \quad det(\tilde{A}) = det(A)det(B) \text{ である．}$$ x-6-2

$A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ とする．各 $k \in \{1, ..., n\}$ に対し，$\tilde{A}$ の $n+k$-列に，すべての $\ell \in \{1, ..., n\}$ に対する $\tilde{A}$ の ℓ-列の $b_{\ell,k}$ 倍を足して得られる列ベクトルを $\tilde{a}'_{n+k}$ とすると，

$$(6.5) \quad \tilde{a}'_{n+k} = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^n a_{1,\ell} b_{\ell,k} \\ \sum_{\ell=1}^n a_{2,\ell} b_{\ell,k} \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^n a_{n,\ell} b_{\ell,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる[7]．したがって，すべての $k \in \{1, ..., n\}$ に対して $\tilde{A}$ の $n+k$ 行目を $\tilde{a}'_{n+k}$ で置き換えて得られる行列を $\tilde{A}'$ とすると，

[5] "$\dotplus$" という記号は，ここで便宜上定めたもので，この意味で広く用いられているものではない．

[6] $\sigma \restriction \{1, ..., m\}$ で σ の $\{1, ...m\}$ への制限をあらわす．つまり，$\sigma \restriction \{1, ..., m\}$ は $\{1, ..., m\}$ 上の関数 σ_0 で，すべての $k \in \{1, ..., m\}$ に対し，$\sigma_0(k) = \sigma(k)$ となるようなものである．

[7] $\tilde{a}'_{n+k}$ の下半分が 0 となっているのは，$\tilde{A}$ の左下が $-E_n$ となっていることから実現されていることに注意する．

$$(6.6)\quad \tilde{A}' = \begin{bmatrix} A & AB \\ -E_n & O_n \end{bmatrix}$$

である．前回の講義 [5] の補題 5.3, (2) により，$det(\tilde{A}) = det(\tilde{A}')$ である．ここで，すべての $i \in \{1, ..., n\}$ に対し，$\tilde{A}'$ の i 行目と $n+i$ 行目を入れ替えて得られる行列を $\tilde{A}''$ とすると，

$$(6.7)\quad \tilde{A}'' = \begin{bmatrix} -E_n & O_n \\ A & AB \end{bmatrix}$$

となる．第 4 回目の講義 [4] の補題 4.5, (1) により，

(6.8)　$det(\tilde{A})\ (= det(\tilde{A}')) = (-1)^n det(\tilde{A}'')$ である．

$-E_nAB = -AB$ は AB の各行を -1 倍して得られる行列だから，第 4 回目の講義 [4] の補題 4.5, (3) により，$det(-AB) = (-1)^n \det(AB)$ である．したがって，補題 6.1 により，$det(\tilde{A}'') = (-1)^n det(AB)$ である．

(6.9)　$det(\tilde{A})\ (= det(\tilde{A}')) = (-1)^n(-1)^n det(AB) = det(AB)$ である．

したがって，(6.4) と合せて，$det(AB) = det(A)det(B)$ が得られた．　❏ (定理 6.2)

上の定理 6.2 を用いると，2×2-行列と 3×3-行列の行列式の幾何学的な意味が明らかになる．

任意の角度 θ に対し，平面上の角度 θ の原点を中心とする回転は，回転行列

$$(6.10)\quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ x-6-3

をベクトルに右からかけることで実現できるのだった．

P-6-1-0

補題 6.3 すべての θ に対し，$det(R_\theta) = 1$ である．

証明． 第 3 回の講義 [2] の例3.1 により, $det(R_\theta) = \cos\theta\cdot\cos\theta - (-\sin\theta\cdot\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ である．　❏ (補題 6.3)

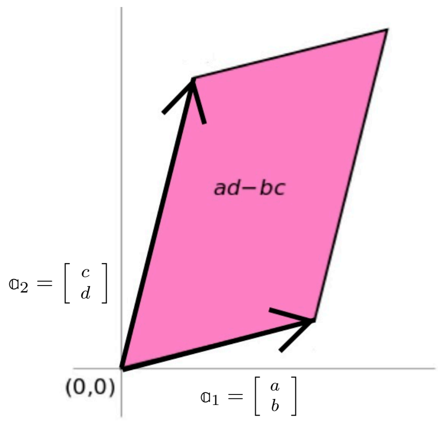
P-6-1-1

系 6.4 $n \times n$-行列 $A = [\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2]$ と任意の角度 θ に対し $det(A) = det([R_\theta\mathbb{a}_1\ R_\theta\mathbb{a}_2])$ である．つまり，2×2-行列の行列式の値は，原点を中心とする回転に関して不変である．

証明． $det([R_\theta\mathbb{a}_1\ R_\theta\mathbb{a}_2]) = det(R_\theta A) \underbrace{=}_{\text{定理 6.2 による}} det(R_\theta)\cdot det(A) \underbrace{=}_{\text{補題 6.3 による}} det(A).$　❏ (系 6.4)

P-6-2

定理 6.5 A を 2×2-行列として $A = [\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_1]$ とする．このとき $det(A)$ の絶対値は，平面ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積と一致する． また，$det(A) > 0$ となるのは，$\mathbb{a}_2$ が平面 $\mathbb{R}^2$ 上鋭角をはさんで $\mathbb{a}_1$ の左回り (反時計回り) の方向にある，ちょうどそのときである．



証明． $\mathbb{a}_1 = \mathbb{0}$ なら，$det(A) = 0$ となるが，このときは，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形は一直線 (あるいは原点 1 点) につぶれたものになり，面積は 0 となるので主張は成り立つ．

$\mathbb{a}_1 \neq \mathbb{0}$ とする．$\mathbb{a}_2 = \mathbb{0}$ の場合または $\mathbb{a}_2$ が $\mathbb{a}_1$ のスカラ倍の場合にも平行四辺形はつぶれたものになり，$det(A) = 0$ となるので，この場合にも主張は成り立っている．

$\mathbb{a}_2 \neq \mathbb{0}$ で $\mathbb{a}_2$ は $\mathbb{a}_1$ のスカラ倍でもないとする．系 6.4 により，必要なら原点を中心とする回転を施して，$\mathbb{a}_1$ は x 軸 + 方向のベクトルとしてよい，つまり，$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ で，$\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ となっているとしてよい．$\mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ とする．$\mathbb{a}_2$ が平面上鋭角をはさんで $\mathbb{a}_1$ の左回り (反時計回り) の方向にあるときには，$d > 0$ で，d は，$\mathbb{a}_1$ (x 軸の + 方向のベクトル) を底辺としたときの，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の高さになっている．ここで，$det(A) = \det \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad$ だから，$det(A)$ はこの平行四辺形の面積に一致することがわかる．

$\mathbb{a}_2$ が平面上鋭角をはさんで $\mathbb{a}_1$ の左回り (反時計回り) の方向にないときには，$d < 0$ となるから，同様の議論で，$det(A) = ad < 0$ で $|ad|$ は，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積と等しくなる． ❑ (定理 6.5)

3×3-行列の行列式についても，同様の議論で，次が示せる:

P-6-3

定理 6.6 A を 3×3-行列として，$A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \mathbb{a}_3 \end{bmatrix}$ とする．このとき，$det(A)$ の絶対値は，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$, $\mathbb{a}_3$, を 3 辺とする平行 6 面体の体積に等しい．$det(A)$ が正の値をとるのは，ベクトル $\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$, $\mathbb{a}_3$ が右手系をなす，ちょうどそのときである． ❑

参考文献

[1] 渕野 昌，2020 年 7 月 09 日 (2 回目) の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf

[2] 渕野 昌，2020 年 7 月 16 日の講義 (3 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-03-2020-07-16.pdf

[3] 渕野 昌，2020 年 7 月 16 日の講義 (3 回目) の宿題の課題，解答例と解説
https://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-3.pdf

[4] 渕野 昌，2020 年 7 月 23 日の講義 (4 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-04-2020-07-23.pdf

[5] 渕野 昌，2020 年 7 月 30 日の講義 (5 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-05-2020-07-30.pdf

[6] 三宅 敏恒，線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ，培風館 (2008).

[このテキストはほぼ完成版となっていますが．まだ細分の手直しや書き足しをする可能性もありえます．最新版があるかどうかをチェックしてください．最新版は，

https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-06-2020-08-06.pdf

から download できます．]