線形代数 2 — 2020年08月13日の講義 (第2クォーター 7回目)

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

(2020 年 08 月 13 日 11:49 版)

以下は，2020 年 08 月 13 日に実施の線形代数 2 のオンライン講義 (第 2 quarter 7 回目) です．行列式に関する最後の講義です．今回の講義では，正方行列 ($n \times n$-サイズの行列) が正則であること (つまり逆行列を持つこと) の行列式による判定条件，行列式の逆行列の余因子行列による表現と，クラメールの公式について話します．

行列式が後期の線形代数の講義にどう関連してくるかを見るために，演習問題の assignment は，来学期の予習となるようなものになっています．

今回の講義でも，いくつかの事項については，教科書の説明を補足したり，教科書とは若干違う記述の仕方で述べてあるところもあります．

このファイルの最新版は，https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-07-2020-08-13.pdf から download できます．

この講義のファイルは，講義の日時の前後で複数回修正加筆される可能性のある work in progress です．

第 5 回の講義 [5] の記法を思い出すと，自然数 $m,\ n > 1$ と，ん $m \times n$-行列 A に対し，$1 \leq k \leq m$, $1 \leq \ell \leq n$ として，$A_{k,\ell}$ で，行列 A から i-行と ℓ-列を取り除くことで得られる $(m-1) \times (n-1)$-行列を表わすのだった．つまり，$A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$，$A_{k,\ell} = [a'_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}}$ とすると，

$$a'_{i,j} = a_{i',j'}$$

である．ただし，ここで，

$$i' = \begin{cases} i, & i < k \text{ のとき}; \\ i+1, & k \leq i \text{ のとき} \end{cases} \qquad\qquad j' = \begin{cases} j, & j < \ell \text{ のとき}; \\ j+1, & \ell \leq j \text{ のとき} \end{cases}$$

とする．

第５回目の講義 [5] で得られたラプラス展開 (余因子展開) の式は，添字に使った文字を変更して記すと，任意の $n \times n$-行列 A に対し，行に関する式は，任意の $1 \le j \le n$ に対し，

$$(5.3) \qquad det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\, det(A_{i,j})$$

で，列に関する式は，任意の $1 \le i \le n$ に対し，

$$(5.6) \qquad det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\, det(A_{i,j})$$

である．

$n \times n$-行列 $A = [a_{i,j}]$ に対し，$1 \le i, j \le n$ に対し，

$$(7.1) \qquad a^*_{i,j} = (-1)^{i+j} det(A_{j,i})$$ x-7-0

とする．これらを並べて，得られる $n \times n$-行列を $\tilde{A}$ で表わし，A の余因子行列 (co-factor matrix) とよぶ [1]．$\tilde{A} = [a^*_{i,j}]$ である．余因子行列の意義は，次の定理から，理解できる．

定理 7.1 (教科書 [7] の定理 3.4.1) 任意の $n \times n$-行列 A に対し，$A\tilde{A} = \tilde{A}A = det(A)E_n$ である． P-7-0

証明．

$$(7.2) \qquad A\tilde{A} = det(E_n)$$ x-7-1

を示す．$\tilde{A}A = det(E_n)$ も，(5.6) のかわりに (5.3) を用いることで同様に示すことができる．

$A\tilde{A} = [c_{i,j}]$ とすると，

$$(7.3) \qquad \begin{aligned} c_{i,i} &= a_{i,1}a^*_{1,i} + a_{i,2}a^*_{2,i} + \cdots + a_{i,n}a^*_{n,i} && ;\ \text{行列の積の定義による} \\ &= a_{i,1}(-1)^{1+i}det(A_{i,1}) + a_{i,2}(-1)^{2+i}det(A_{i,2}) + \cdots + a_{i,n}(-1)^{n+i}det(A_{i,n}) \\ & && ;\ a^*_{k,i}\text{の定義 (7.1) による} \\ &= (-1)^{1+i}a_{i,1}det(A_{i,1}) + (-1)^{2+i}a_{i,2}det(A_{i,2}) + \cdots + (-1)^{n+i}a_{i,n}det(A_{i,n}) \\ &= det(A) && ;\ \text{(5.6) による．} \end{aligned}$$ x-7-2

---

[1] $\tilde{A}$ は A tilde (ティルデ) と読みますが，日本語では「A チルデ」と言うことが多いようです．「ティ」「ディ」という音は昔の日本人は発音できなくて「チ」「ジ」で代用することが多かったようです．ビルジングは今ではビルディングと呼ばれることが多いですが，スチール，チーム，チケット，ロマンチックなど，「ティ」の「チ」での代用はまだ沢山残っています．一方，アーティスト，ミルクティーなど，本来の音に近い transcription がなされるようになっている単語もある，というのは面白い現象です．

なお，線形代数の教科書によっては，$a^*_{i,j} = (-1)^{i+j} det(A_{j,i})$ として，$\tilde{A}$ を ${}^t[a^*_{i,j}]$ として定義する，という書き方になっているものもあると思いますが，ここでは，講義の教科書 [7] のやり方に合せています．

次に $i \neq j$ とする．B を A での j-行を A の i-行で置き換えて得られる行列とすると，B は等しい 2 つの行を持つから，第 5 回の講義 [5] の補題 5.1,(1) により，$det(B) = 0$ である．したがって，$B = [b_{i,j}]$ とすると，

$$
\begin{aligned}
c_{i,j} &= a_{i,1}a^*_{1,j} + a_{i,2}a^*_{2,j} + \cdots + a_{i,n}a^*_{n,j} && ;\ \text{行列の積の定義による} \\
&= a_{i,1}(-1)^{1+i}det(A_{j,1}) + a_{i,2}(-1)^{2+i}det(A_{j,2}) + \cdots + a_{i,n}(-1)^{n+i}det(A_{j,n}) \\
& && ;\ a^*_{k,j}\ \text{の定義 (7.1) による} \\
&= (-1)^{1+i}a_{i,1}det(A_{j,1}) + (-1)^{2+i}a_{j,2}det(A_{i,2}) + \cdots + (-1)^{n+i}a_{i,n}det(A_{j,n}) \\
&= (-1)^{1+i}b_{j,1}det(B_{j,1}) + (-1)^{2+i}b_{j,2}det(B_{j,2}) + \cdots + (-1)^{n+i}b_{j,n}det(B_{j,n}) \\
& && ;\ B\ \text{の定義による} \\
&= det(B) = 0 && ;\ (5.6)\ \text{による．}
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$
x-7-3

である．以上で，(7.2) が示せた． □ (定理 7.1)

上の定理 7.1 を用いると，正方行列が正則 (つまり逆行列を持つ) であることの行列式による特徴付けが得られる．

系 7.2 (教科書 [7], 定理 3.4.2) A を正方行列とする．A が正則であるのは，$det(A) \neq 0$ となるちょうどそのときである． A が正則なときには， P-7-1

$$
A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\tilde{A} \tag{7.5}
$$
x-7-4

である．

証明． A が正則なら, A の逆行列 A^{-1} が存在するから, $1 = det(E) = det(AA^{-1}) \underbrace{=}_{\text{第 6 回の講義 [6] の定理 6.2 による}} det(A)det(A^{-1})$ により，$det(A) \neq 0$ である．

逆に $\det(A) \neq 0$ なら，$B = \frac{1}{det(A)}\tilde{A}$ とすると，定理 7.1 により，$AB = BA = E$ となるから，B は A の逆行列である．特に，等式 $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\tilde{A}$ が成り立つ．

例 7.1 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする．このとき $det(A) = ad - bc$ だった (第 3 回の講義 [3] の例 3.1)．1×1-行列の行列式は，その行列の (唯一の) 成分自身であることに留意すると，A が正則なのは $ad - bc \neq 0$ のときで，このときには，(7.5) により，$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ となることがわかる．

定理 7.1 から，第 1 回の講義 [1] で保留になっていた補題 1.1 の証明が導かれる．まず次を確認しておく．

P-7-2

補題 7.3 A を $n \times n$ 行列で正則とする．B を $n \times n$-行列で，$AB = E_n$ または $AB = E_n$ のいずれか片方を満たすとき，B は A の逆行列となり，したがって，実はもう一方の等式も満たす．

証明． A の逆行列 A^{-1} が存在するとして，$AB = E_n$ のとき $B = A^{-1}$ を示す: これは，$A^{-1} = A^{-1}E_n = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = E_nB = B$ によりよい．$BA = E_n$ のときも同様に $B = A^{-1}$ が示せる． ❑ (補題 7.3)

系 7.4 (第 1 回の講義 [1] の補題 1.1 (教科書 [7] の定理 2.4.1)) A を $n \times n$-行列として，B を $n \times n$-行列で，$AB = E_n$ または $BA = E_n$ の少なくとも片方を満たすものとする．このとき $B = A^{-1}$ である． P-7-3

証明． 補題 7.3 により，A が正則であることを示せば十分である．たとえば，$AB = E_n$ が成り立つとすると，$det(A)det(B) \underbrace{=}_{\text{第 6 回の講義 [6] の定理 6.2 による}} det(AB) = det(E_n) = 1$ だから，$det(A) \neq 0$ である．したがって，系 7.2 により，A は正則である． ❑ (系 7.4)

A を正則な $n \times n$-行列として，$\mathbb{b}$ を n-次元列ベクトルとする．$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ として連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ を考える．

$$(7.6) \quad A\mathbb{x} = \mathbb{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{x} = A^{-1}A\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$$

だから，$\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$ がこの連立方程式の唯一の解である．クラメールの公式は，この解の行列式を用いた表現である．

定理 7.5 (クラメールの公式，教科書 [7], 定理 3.4.3) $A = [\,\mathbb{a}_1 \;\cdots\; \mathbb{a}_n\,]$ を正則な $n \times n$-行列として $\mathbb{b}$ を n-次元列ベクトルとする．$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ として連立方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解は，$1 \leq i \leq n$ に対して， P-7-4

$$(7.7) \quad x_i = \frac{det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\text{ 列目}}{\mathbb{b}} \cdots \mathbb{a}_n\,]}{det(A)}$$ x-7-5

で与えられる．

証明． A が正則なら，系 7.2 により $det(A) \neq 0$ だから，(7.7) は意味をなす式になっている．行列とベクトルの和と積の定義から，$\mathbb{b} = A\mathbb{x} = [\,\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n\,]\mathbb{x} = x_1\mathbb{a}_1 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n$ である．したがって，

$$
det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\text{ 列目}}{\mathbb{b}} \cdots \mathbb{a}_n\,] = det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\text{ 列目}}{x_1\mathbb{a}_1 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n} \cdots \mathbb{a}_n\,] \tag{7.8}
$$

x-7-6

$$
= x_1 \underbrace{det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\text{ 列目}}{\mathbb{a}_1} \cdots \mathbb{a}_n\,]}_{=0,\ [4],\ \text{補題 } 4.6,(2),(3)\ \text{と}\ [5],\ \text{補題 } 5.3,\ (1)\ \text{による}} + \cdots + x_i \underbrace{det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\text{ 列目}}{\mathbb{a}_i} \cdots \mathbb{a}_n\,]}_{=\det(A)} + \cdots
$$

$$
+ x_n \underbrace{det[\,\mathbb{a}_1 \cdots \overset{i\text{ 列目}}{\mathbb{a}_n} \cdots \mathbb{a}_n\,]}_{=0,\ [4],\ \text{補題 } 4.6,(2),(3)\ \text{と}\ [5],\ \text{補題 } 5.3,\ (1)\ \text{による}}
$$

$$
= x_i det(A)
$$

である．この等式を $det(A)$ で割ると (7.7) が得られる． □ (定理 7.5)

参考文献

[1] 渕野 昌，2020 年 7 月 02 日 (1 回目) の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-01-2020-07-02.pdf

[2] 渕野 昌，2020 年 7 月 09 日 (2 回目) の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf

[3] 渕野 昌，2020 年 7 月 16 日の講義 (3 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-03-2020-07-16.pdf

[4] 渕野 昌，2020 年 7 月 23 日の講義 (4 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-04-2020-07-23.pdf

[5] 渕野 昌，2020 年 7 月 30 日の講義 (5 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-05-2020-07-30.pdf

[6] 渕野 昌，2020 年 8 月 6 日の講義 (6 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-06-2020-08-06.pdf

[7] 三宅 敏恒，線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ，培風館 (2008).

[このテキストはほぼ完成版となっていますが．まだ細分の手直しや書き足しをする可能性もありえます．最新版があるかどうかをチェックしてください．最新版は，

https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-07-2020-08-13.pdf

から download できます．]