3 (a)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_m \end{bmatrix}$$

$a_1 \neq 0$ $a_2 \neq 0 \cdots$ $a_m \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Aは逆行列を持つ

まず $a_1 \neq 0$ $a_2 \neq 0$ $\cdots a_m \neq 0$ としてみる。このときは、

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_m} \end{bmatrix}$$ が考えられるが

BはA逆行列になっている

これを示すのには、

AB = BA = E を示せばよい。

つぎに $a_1 \cdots a_m$ のどれか少なくとも1つは0であるとき

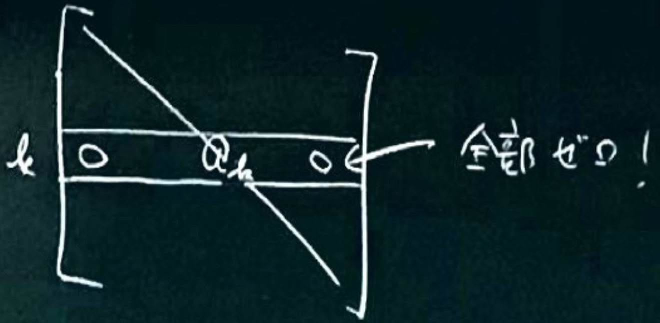
Aは逆行列を持たないことを示す。

たとえば $1 \leq k \leq m$ について $a_k = 0$ とする このとき

Bを $m \times m$ 行列として $B = [b_{ij}]$

仮定から Aのk行の成分はすべて0である

このことからABの(k,k)成分は $\sum_j \underbrace{a_{kj}}_{=0} b_{jk} = 0$



特に $AB \neq E$ である.

Bは任意だったので Aは逆行列を
持たないことが分かる..

(b): ヒント

Aが逆行列 A^{-1} を持つなら
$UA^{-1}U^{-1}$ が $U^{-1}AU$ の逆行列となることを示せ

逆に $U^{-1}AU$ が逆行列 B を持つなら,
UBU^{-1} が A の逆行列になることを示す.

(c) : A が 2×2 行列で 固有値が 2と3

$2\neq3$ となるときには 補題 4.1 から

u_1, u_2 をそれぞれの固有ベクトルとすると,

$U=[u_1\ u_2]$ とおく. Uは可逆で

$$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$$ となる.

このとき (a) から, $U^{-1}AU$は可逆

したがって (b) から Aは可逆である.

(d) :

$$\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}^m=$$

$$\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a_1)^2&0\\0&(a_2)^2\end{bmatrix}$$

…

から $$\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix}^m=\begin{bmatrix}(a_1)^m&0\\0&(a_2)^m\end{bmatrix}$$ である.

問題 Aを正方行列として $A^2=A$ のとき Aの固有値は1に限ることを示せ

問題 Aが可逆な正方行列で $A^2=A$ のとき $A=E$ となることを示せ

したがって、

$$(U^{-1}AU)^n = \begin{bmatrix}(a_1)^n & 0\\ 0 & (a_2)^n\end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$\underbrace{U^{-1}A\underbrace{U\,U^{-1}}_{E}A\underbrace{U\,\cdots\cdots\,U^{-1}}_{E}AU}_{n\text{個}}$$

$$= U^{-1}A^nU$$

この両端に左からU、右からU^{-1}をかけると、

$$A^n = \underbrace{UU^{-1}}_{E}A^n\underbrace{UU^{-1}}_{E} = U\begin{bmatrix}(a_1)^n & \\ & (a_2)^n\end{bmatrix}U^{-1}$$

4. Aの対角化は

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}}_{U^{-1}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{U}$$ である。

したがって 3.(a)から

$$A^n = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

答：

nが偶数のとき

$A^n = ..$

奇数のとき

$A^n = \cdots$