

線形代数3

担当: 須野 昌 (Sakio Fuchino)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

<http://fuchino.ddo.jp/lecture/>

実数の全体 $\mathbb{R}$

✓ 複素数の全体 $\mathbb{C}$

数ベクトル空間

↑ 講義の

ページ

$\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間

n は 1, 2, 3... のうちのどれかの数とい

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ベクトル

またはベクトル

n 次元 (数) ベクトル

例) $\mathbb{R}^2$ には

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ など}$$

$\mathbb{R}^2$ の加法では

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\pi \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ の 加法 (足し算) を $+$ とする:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{bmatrix}$$

↑ 各成分の足し算の結果を
対応する成分とするベクトル
として定義する。

$\mathbb{R}$ の 実数 の スカラー倍
 $d \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ のとき

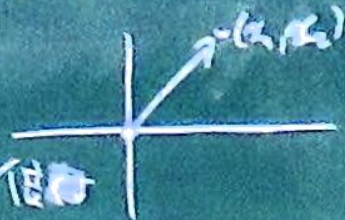
$$d \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix}$$

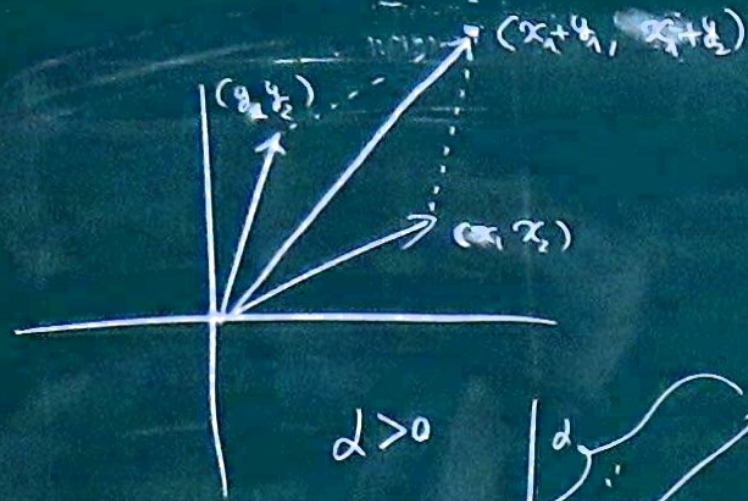
↑ 成分ごとには d をかける。

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は平面上の "ベクトル" と

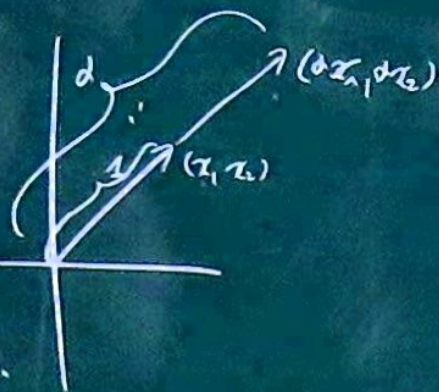
対応させると

ベクトルの加法とスカラー倍





$\alpha > 0$



と幾何学的に解釈できる。

$\mathbb{R}^n$ の要素を $a, b, c, \dots$ と表す。

0 で $\mathbb{R}^n$ のうち $\begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$ の元を $\mathbf{0}$ と表す。

n 次のゼロベクトル

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし

ベクトルの加法は次の性質を持つ u, v, w を $\mathbb{R}^n$ の任意の n 次ベクトルとすると、

$$(1) \quad u + v = v + u$$

$$(2) \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$(3) \quad u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$$

$$(3)' \quad u + u^* = \mathbf{0} \text{ とある } u^* \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する}$$

$$(4) \quad \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

$$(7) \quad 1u = u$$

$$(8) \quad 0u = \mathbf{0}$$

$$(5) \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

$$(6) \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

$\frac{1}{2}A$ の $-\frac{1}{2}B$:

(2): $U = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ とおくと,

$$U + (V + W) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_m + z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ \vdots \\ x_n + (y_n + z_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ \vdots \\ (x_n + y_n) + z_n \end{bmatrix} = \dots = (U + V) + W$$

↑
数の結合律の証明

(4): $U = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とおくと

$(\alpha\beta)U = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ \vdots \\ (\alpha\beta)x_n \end{bmatrix} \overset{\substack{\text{数の分配律} \\ \alpha(\beta x_i)}}{=} \begin{bmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \vdots \\ \alpha(\beta x_n) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{bmatrix}$

$$= \alpha(\beta U)$$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \leq 1?$$

$$C([a, b]) = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \right. \\ \left. f \text{ は連続} \right\}$$

$$f, g \in C([a, b]) \text{ に対して,}$$

$$f+g \in C([a, b]) \text{ となる}$$

$$f+g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)+g(x)$$

と定義する。

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ に対して, } \alpha f \in C([a, b])$$

$$\alpha f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \alpha f(x)$$

と定義する。この関数の和とスカラー倍は次を満たす。

$$f, g, h \in C([a, b]) \text{ とすると}$$

$$(1) \quad f+g = g+f$$

$$(2) \quad f+(g+h) = (f+g)+h$$

$$(3) \quad f+0_{[a,b]} = 0_{[a,b]}+f = f$$

$$(3') \quad f+f^* = 0_{[a,b]} \text{ となる } f^* \in C([0, 1]) \text{ なる}$$

関数がある。

$$0_{[a,b]}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 0$$

$$0_{[a,b]} \in C([a, b])$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(4) \alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$$

$$(5) (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$$

$$(6) \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$$

$$(7) 1f = f$$

$$(8) 0f = 0_{[a,b]}$$

(抽象) ベクトル空間

ある集合 V の上に二項演算 $+$ と

スカラー乗 αx が定義されており $0 \in V$ があり

任意の $x, y, z \in V$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(1) x + y = y + x$$

$$(4) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$(2) x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(5) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(3) x + 0 = 0 + x$$

$$(6) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(3') x^* \in V \text{ で } x + x^* = 0$$

$$(7) 1x = x$$

となるものが存在する

$$(8) 0x = 0$$

が成り立つとき V を $\mathbb{R}$ 上の (抽象) ベクトル空間と呼ぶ

(抽象)ベクトル空間でのゼロ元 0 は

(3)で $1x = x$ である。

つまり

(3)を満たす $x \in V$ は $x + a = a + x = x$ である

よって a は 0 に等しい。

証明 a を (3)を満たすものとし、特に x として 0 をとると

$$a = \underset{\substack{\uparrow \\ (3)}}{0} + a = \underset{\substack{\uparrow \\ (3)'}}{0}$$

だから $a = 0$ である。

V を $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間とすると $W \subseteq V$ が V の 部分空間 であるとは、次の (i) (ii) (iii) が成り立つこととする

(i) $0 \in W$ (ii) $\underbrace{x, y \in W}_{(x, y) \in W} \Rightarrow x + y \in W$

(iii) $x \in W, d \in \mathbb{R} \Rightarrow dx \in W$

n 次のゼロベクトル

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし

ベクトルの加法は次の性質を持つ u, v, w を $\mathbb{R}^n$ の任意の n 次元ベクトルとすると、

(1) $u + v = v + u$

(2) $u + (v + w) = (u + v) + w$

(3) $u + 0 = 0 + u = u$

(3') $u' \in \mathbb{R}^n$ について $u + u' = 0$ となるものがない

(4) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

(7) $1u = u$

(8) $0u = 0$

(5) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

(6) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$