

Recap:

集合 V 上に "たし算" + と スカラー倍

($\mathbb{R} \ni \alpha$ と $V \ni x$ にたいして αx が定義されている)

定義されている, 任意の $u, v, w \in V$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(= たいして) が成り立つとき V を $\mathbb{R}$ 上の
ベクトル空間という.

$$(1) u + v = v + u$$

$$(2) u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$(3) u + 0 (= 0 + u) = u$$

「(3)' $u^* \in V$ で $u + u^* = 0$ となるものが存在する」

$0 \in V$ かつ
定義されている

$$(4) \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

$$(5) (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

$$(6) \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

$$(7) 1u = u \quad (8) 0u = 0$$

例 11 $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ をベクトルの和と

スカラー倍, とゼロベクトル $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ といふことにすれば (1) ~ (7) を満たす

(2) $C([a, b]) = \{f : f \text{ は区間 } [a, b] \text{ 上の連続関数}\}$ を関数の和と;
関数の定数倍と $\text{id}_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto 0$ といふことにすれば

ベクトル空間の基本性質 (1) - (7) を満たす

(3)' は、他の性質から導く：
 (1) (2) の中から

$(-1)u$ と $-u$ とは等しい

$u^* = (-1)u$ とすると、

$$\underline{u + u^*} = u + (-1)u$$

$$(7) \rightarrow = 1u + (-1)u$$

$$(5) \rightarrow = (1 + -1)u$$

$$\rightarrow = 0u$$

$$(8) \rightarrow = \underline{0}$$

証明は別紙

$u + u^* = 0$ と仮定すると、 u^* は u の逆元か？

— 疑問 —

証明

$u + u^* = 0$ より $u + u^{**} = 0$ と仮定すると、

$$(3) \rightarrow \begin{aligned} & \underline{u^{**}} = 0 + u^{**} \\ & = (u + u^*) + u^{**} \end{aligned}$$

$$(1) \rightarrow = (u^* + u) + u^{**}$$

$$(2) \rightarrow = u^* + (u + u^{**})$$

$$= u^* + 0$$

$$(3) \rightarrow = \underline{u^*}$$

よって、 $u^* = u^{**}$

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とするとき, $W \subseteq V$ が
次を満たすとき W は V の部分空間である?

(i) $0 \in W$

(ii) すべての $u, v \in W$ に対し $u+v \in W$

(iii) すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ $u \in W$ に対し $\alpha u \in W$

W は $+$ に関して
閉じている

W はスカラー倍
に関して閉じている

例 (trivial な) 部分空間の例
自明

(1) V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とすると, V 自身は V の
部分空間である。

(2) $\{0\}$ は V の部分空間

(i) は 0. k. (ii) $0+0=0$

(iii) $\alpha 0 = 0$

補題 任意の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V のゼロベクトル 0 と,
 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha 0 = 0$

証明 $\alpha 0 = \alpha(0 \cdot 0) = (\alpha \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ $\square$

例 (1) $V = \mathbb{R}^n$ で

$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R} \right\}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

(2) $V = \mathbb{R}^n$ で
 A を実数成分とよぶ $m \times m$ 行列とし

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 W を

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \right\}$$

とすると W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる。

(3) $V = C([a, b])$ で

$$W = \left\{ f \in C([a, b]) \mid \int_a^b f dx = 0 \right\}$$

とすると W は V の部分空間。

証明 (1): 数ベクトルの和とスカラー倍の定義から明か

(2): $0 \in W$: $A0 = 0$ である。

W は和とスカラー倍について閉じている。

$u, v \in W$ とすると, $Au = 0, Av = 0$ である。
 $A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$.

つまり, $u+v \in W$

(ii) W はスカラー倍について閉じている: $u \in W$ とき

$$Au = 0 \text{ である} \quad A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha 0 = 0$$

(つまり) $\alpha u \in W$ である。

注意 実は $\mathbb{R}^n$ の部分空間はすべてこの形のものになることを後で示す。

(3): (i): $\int_a^b \text{id}_0 dx = 0$ (つまり) $\text{id}_0 \in W$ である。

(ii): $f, g \in W$ とき $\int_a^b f dx = 0, \int_a^b g dx = 0$ である

$$\int_a^b f+g dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx = 0 + 0 = 0 \text{ である} \quad f+g \in W$$

(iii) $f \in W$ とき $\int_a^b f dx = 0$ である $\int_a^b \alpha f dx = \alpha \int_a^b f dx = \alpha \cdot 0 = 0$ である $\alpha f \in W$

V を n 次元空間として, $u_1, \dots, u_m \in V$ とする

このとき,

$$[\{u_1, \dots, u_m\}]_V = \left\{ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m \mid \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\}$$

とす?

補題 3 $[\{u_1, \dots, u_m\}]_V$ は V の部分空間

である. $\Rightarrow$ $\{u_1, \dots, u_m\}$ は V の

部分空間と対し $(u_1, \dots, u_m)$ の張る部分空間ということもある.)

証明 (i): $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ とすると

$$\alpha u_1 + \dots + \alpha u_m = 0 + \dots + 0 = 0 \quad (\because) 0 \in [\{u_1, \dots, u_m\}]_V$$

(ii) $a, b \in [\{u_1, \dots, u_m\}]_V$ とす

これは

$$a = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$$

$$b = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m$$

$$\text{とすると } a+b = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m$$

$$= \underbrace{\alpha_1 u_1 + \beta_1 u_1}_{(i)} + \dots + \underbrace{\alpha_m u_m + \beta_m u_m}_{(ii)}$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \dots + (\alpha_m + \beta_m) u_m \in [\{u_1, \dots, u_m\}]_V$$

(iii): $a \in [\{u_1, \dots, u_m\}]_V$ とし, $a = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$ とし

$$\lambda a = \lambda (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m) \stackrel{(b)}{=} \lambda (\alpha_1 u_1) + \dots + \lambda (\alpha_m u_m)$$

⑦

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m (d_i d_i) u_i + \dots + (d_m d_m) u_m \in [\{u_1, \dots, u_m\}]_V$$

(4)

7 あり.

17 あり = $u \in V$ とするとき

$$[\{u\}]_V = \{du \mid d \in \mathbb{R}\}$$

$u, v \in V$ とするとき

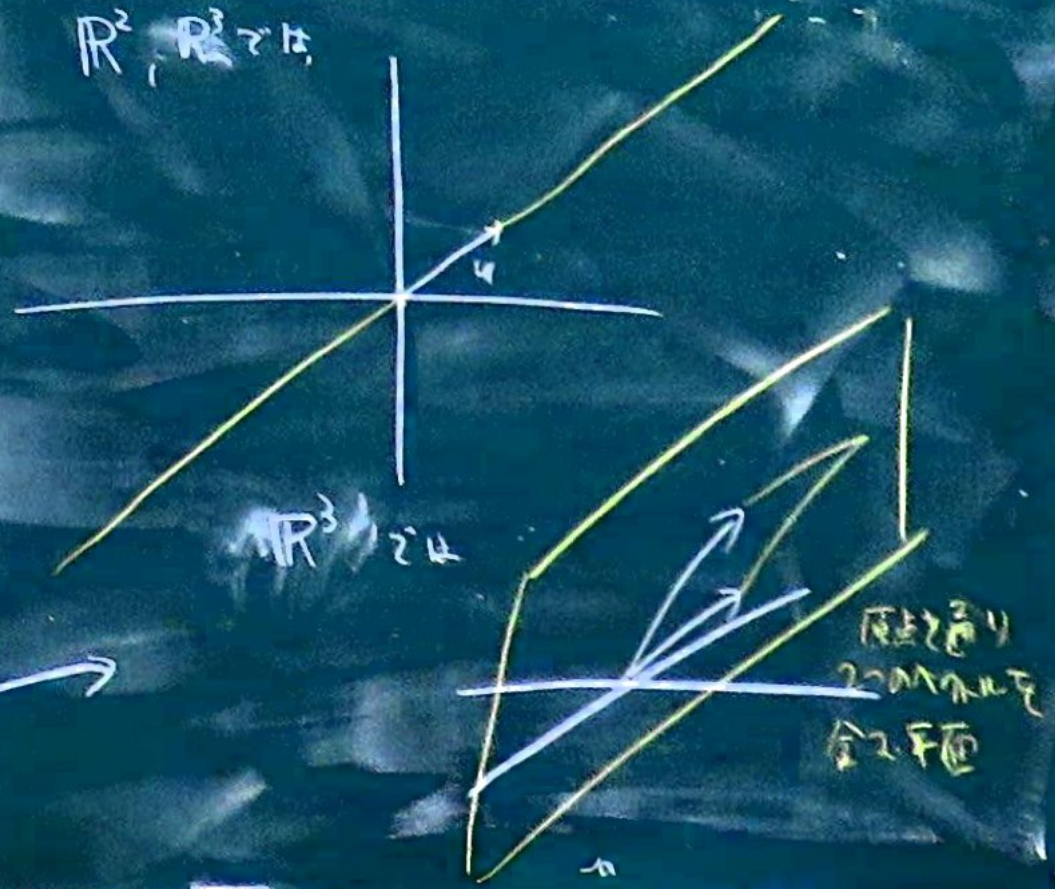
$$[\{u, v\}]_V = \{du + pv \mid d, p \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

$$u = \delta v \text{ と仮定するとき } du + pv = d\delta v + pv = (d\delta + p)v$$

$$\text{よって } [\{u, v\}]_V = [\{v\}]_V$$

17 ありと仮定

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ について



$\mathbb{R}^3$ について

17 あり
2つの平面
全く平面