定理 3.2 $\mathbb{R}$上の V をベクトル空間とする

とき，V の要素 $u_1, \cdots, u_n$ と

$v_1, \cdots, v_m$ に対し，

$v_1 \cdots v_m$ の1つ1つは，$u_1 \cdots u_n$ の

線形結合（一次結合）で書けるとする．

このとき $m > n$ なら $v_1 \cdots v_m$ は線形

独立でない．

系 3.3 $[\{u_1 \cdots u_n\}]_V \ni v_1 \cdots v_m$ で $m > n$

なら $v_1 \cdots v_m$ は線形独立でない

Rem.

$u_1 \cdots u_n \in V$ に対し，

$$[\{u_1 \cdots, u_n\}]_V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \;\middle|\; \begin{matrix} c_i \in \mathbb{R} \\ 1 \leq i \leq n \end{matrix} \right\}$$

$u_1 \cdots u_n$ から生成する V の部分空間

とする．$[\{u_1 \cdots u_n\}]_V$ は

V の部分空間になる．

$\mathbb{R}$上のベクトル空間 V に対して、
$u_1, \dots, u_m \in V$ で $V = [\{u_1, \dots, u_m\}]_V$
となるものがとれるとき V は有限次元であるという。

V の要素の組み $u_1 \cdots u_m$ が線形独立で
$V = [\{u_1, \cdots u_m\}]_V$ となっているとき $u_1 \cdots u_m$ を
V の線形基底とよぶ
(linear basis)

Recap: $\mathbb{R}$上のベクトル空間 V に対し、
$u_1 \cdots u_m \in V$ が線形独立とは、
任意の $c_1, \dots c_m \in \mathbb{R}$ に対しても
$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i = 0$ なら $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となること

補題4.1 $u_1, \cdots, u_m \in V$ が線形独立なら
$u_i \neq 0 \quad 1 \leq i \leq m$

証明 もし $u_{i_0} = 0$ とすると $c_{i_0} = 1$ $c_k = 0$ $k \neq i$ とすれば
$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i = 0 + \cdots + 0 = 0$ となり $u_1 \cdots u_m$ は線形独立でなくなってしまう。 ∎

補題 4.2 $u_1 \cdots u_n$ と $v_1 \cdots v_m$ が両方とも V の基底なら、$n = m$

証明 $u_1 \cdots u_n$ と $v_1 \cdots v_m$ が V の基底であることから、

$[\{u_1 \cdots u_n\}]_V = V \ni v_1 \cdots v_m$

$[\{v_1 \cdots v_m\}]_V = V \ni u_1 \cdots u_n$ となるから、

系 3.3 から、$m \not> n$　$n \not> m$（つまり $m \leq n$, $n \leq m$）

となるので $n = m$.　⊠

目標 V が有限次元なら基底が存在する.

補題 4.3 $u_1 \cdots u_n \in V$ が線形独立とする

とき、$u \in V$ に対し、

$\{u_1, \cdots, u_n, u\}$ が線形独立 $\Longleftrightarrow$ $[\{u_1 \cdots u_n\}]_V \not\ni u$

証明 "$\Rightarrow$"：もし $u \in [\{u_1 \cdots u_n\}]_V$ とすれば

$c_1, c_2 \cdots c_n \in \mathbb{R}$ で $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ となるものがある.

このとき $c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n + \underset{\neq 0}{(-1)} u = 0$ となるので

$u_1 \cdots u_n\ u$ は線形独立でない

"$\Leftarrow$"：$u_1 \cdots u_n, u$ が線独立でないとすると、$c_1 \cdots c_n, c \in \mathbb{R}$

$[c_1 \cdots c_n, c] \neq [0, 0 \cdots 0]$ で $c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n + c u = 0$

となるものがとれる. このとき $c \neq 0$（もし $c = 0$ とすると、⊘

⑦ $c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m = 0$ となり $u_1 \cdots u_m$ の独立性に矛盾する。)

このとき 両辺に $\frac{1}{c}$ をかけて移項すると

$$u = -\frac{c_1}{c} u_1 + \cdots + \left(-\frac{c_m}{c}\right) u_m$$ となるので

$u \in [\{u_1, \cdots, u_m\}]_V$ となる。 ☒

空集合 ϕ に対して $[\phi]_V = \{0\}$ とする。

補題4.4 $u_1 \cdots u_m \in V$ に対し、

$\{u_1, \cdots, u_m\}$ が線形独立 $\Leftrightarrow$ すべての $0 \le k < m$ に対して

$[\{u_0, \cdots, u_k\}]_V \not\ni u_{k+1}$ となる

ただし $k=0$ のときには $\{u_0 \cdots u_k\} = \phi$ とする

証明 "$\Rightarrow$" $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が線形独立なら、

$\{u_1 \cdots u_k\}$ $(1 \le k \le m)$ も線形独立である。

[もし $\{u_1, \cdots, u_k\}$ が線形独立でなかったとすると、

$\underbrace{c_1, \cdots, c_k}_{\text{全部は0でないような}} \in \mathbb{R}$ があって $\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = 0$ とできるが

このとき

$c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ とすると、$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i = 0$ となるから、

$u_1 \cdots u_m$ は線形独立でなくなってしまう]

$k=0$ のときには $u_1 \neq 0$ だから、$[\phi]_V = \{0\} \not\ni u_1$ また補題4.3

により $1 \le k < m$ に対して、$\underbrace{[\underbrace{\{u_1, \cdots, u_k\}}_{\text{線形独立}}]_V \not\ni u_{k+1}}_{\text{線形独立}}$

"$\Leftarrow$" 右側の条件を仮定する

k に関する帰納法で $\{u_1, \dots, u_{k+1}\}$ が線形独立

($0 \le k < m$) であることを示す.

$k=0$ のときには 右側の条件から

$[\phi]_V = \{0\} \not\ni u_1$ つまり, $u_1 \neq 0$ だから,

u_1 は線形独立である. から主張が成り立つ

$u_1, \dots, u_k$ が線形独立となることが言えたとすると,

右側の条件から $[\underbrace{\{u_1, \dots, u_k\}}_{\text{線形独立}}]_V \not\ni u_{k+1}$ 補題4.3から

$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$ も線形独立である. したがって $k=m-1$ の

ときを考えると $\{u_1, \dots, u_m\}$ が線形独立で

あることが示せた. ⊠

Vの要素の0-組 ϕ は線形独立で $\{0\}$ の基底と思うことにする.

補題4.5

$u_1, \dots, u_m \in V$ に対し

なるとき, $k \le m$ と $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le m$ で

$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$ が $[\{u_1, \dots, u_m\}]_V$ の基底になるものが

存在する.

(つまり, $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$ は線形独立で

しかも $[\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}]_V = [\{u_1, u_2, \dots, u_m\}]_V$

となる)

証明 m に関する帰納法で示す

$m=0$ のときには,

$[\phi]_V = \{0\}$ だが ϕ は $\{0\}$ の基底としたのでよい.

$m=1$ のときには，$u_1=0$ なら 空の部分列をとればよい
$u_1 \neq 0$ でなければ $k=1$ $i_1=1$ とすればよい。

$m \geq 1$ に対して 補題の主張が成り立っているとすると
$m+1$ に対しても成り立つことを示す。$u_1, \dots, u_{m+1} \in V$
帰納法の仮定から，$k \leq m$ と $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ で
$u_{i_1} \cdots u_{i_k}$ は線形独立で $[\{u_1 \cdots u_m\}]_V = [\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}]_V$
となるものがとれる。$u_{m+1} \in [\{u_1, \dots, u_m\}]_V$ なら，
$1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ は $u_1 \cdots u_{m+1}$ に対して求めるよう
なものになっている。そうでないときには，$u_{m+1} \notin [\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}]_V$
となるので 補題4.3から，$\{u_{i_1} \cdots u_{i_k}\ u_{m+1}\}$ は線形独立で，

しかも
$$[\{u_{i_1} \cdots u_{i_k}, u_{m+1}\}]_V = [\{u_1 \cdots u_m\ u_{m+1}\}]_V$$
となっている したがって $k^* = k+1$ として
$$1 \leq i_1 < \cdots < i_k < \underset{i_{k^*}}{\underset{\|}{m+1}} \leq m+1$$
とすればこれが補題で求めるようなものになっている。

定理+定義 4.6 有限次元空間Vには基底が存在する。基底の要素の数は一定である
dimention
この数を V の次元とよぶ。
V の次元を dim(V) と表わす。

証明 Vが有限次元なので

$V=[\{u_1, \ldots, u_m\}]_V$ となる $u_1, \ldots, u_m \in V$ がとれる

補題4.5により、$k \le m$ と $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m$ で

$\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}\}$ が線形独立で $V=[\{u_1, \ldots, u_m\}]_V=[\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}\}]_V$

となるものがある。$u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}$ は V の基底である。

補題4.2により このような k は V に対し1意に決まる。 ☒

定理4.7 Vが有限次元のとき 任意の線形独立な $u_1, \ldots, u_m \in V$ を拡張して基底にできる。

[redacted]