

定理 4.7 V を有限次元のベクトル空間とし、 $u_1, \dots, u_m \in V$ を線形独立なベクトルとする。このとき、 $u_1, \dots, u_m$ は V の基底である。

証明 $V = \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$ とする。
 このとき、 $V = \text{span}\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k\}$ だが、定理 4.5 により、この部分列で V の基底となるものをとれる。とすると、定理 4.5 の証明での部分列のとりかたより得られる部分列は $u_1, \dots, u_m$ を拡張したものになっている。 $\square$

定理 5.1 V の次元が n のとき、 $\dim(V) = n$ と置く。任意の V の n 個の線形独立なベクトルは基底になる。

証明 もし $u_1, \dots, u_n \in V$ が線形独立な基底とならなければ、定理 4.7 より $u_1, \dots, u_n$ は V の基底にできず、これは基底の要素の数が 1 意 (この場合 n) であることに矛盾。 $\square$

定理 5.2 V を有限次元とし、 W を V の部分空間とすると、 W も有限次元で $\dim(W) \leq \dim(V)$ であり、 $\dim(W) = \dim(V)$ なら $W = V$ である。

証明 もし W が有限次元でないとすると、 W の線形独立なベクトルの数は $\dim(V) + 1$ 以上となる。

大団の基底とあるが、これは V の基底として
 見て、線形独立なの? 定理 5.1 に注意。
 (または定理 4.7)

(なぜ?)

W は有限次元なの? 基底 $u_1, \dots, u_k$ があると
 定理 4.7 により, $u_1, \dots, u_k$ は V の基底

$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ に拡張できる。(k=1 ときも)

$$\dim(W) = l \leq k = \dim(V)$$

もし $\dim(W) = \dim(V) = l$ なら, W の基底 $u_1, \dots, u_l$ は
 定理 5.1 により V の基底でもあるので

$$W = [\{u_1, \dots, u_l\}]_W = [\{u_1, \dots, u_l\}]_V = V. \quad \square$$

線形写像 (linear mapping)

一次写像

定数 c に対する定数倍写像 $\rightarrow$ 線形写像

$$m_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; r \mapsto cr$$

一次式 $cx+d$ $c, d \in \mathbb{R}$ に対する一次写像

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; r \mapsto cr+d$$

0-一般化を考へる。

P による写像

定義

$\mathbb{R}$ 上の線形空間 U, V に対し写像

$f: U \rightarrow V$ が 線形写像 であるとは次の

(1) (2) が満たされることである。

(1) 任意の $u, v \in U$ に対し

$$f(u) + f(v) = f(u+v)$$

を満たす V の元 $f(u+v)$ は U の元 $u+v$ の像である。

(2) 任意の $u \in U$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(cu) = cf(u)$$

を満たす V の元 $cf(u)$ は U の元 cu の像である。

例 1 $m > n$ とし

$$p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n; \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

射影 (projection) は 線形写像 である。

$$(1): p \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \right) = p \left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_i + y_i \\ \vdots \\ x_n + y_n \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_i + y_i \\ \vdots \\ x_n + y_n \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = p \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \right) + p \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \right)$$

(2):

$$P\left(c \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_m \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_m \end{bmatrix}$$

$$= c \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = c P\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right)$$

□

例2

$D^\infty = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ } f \text{ は } C^\infty\text{-級}\}$
は関数の和とスカラー倍 (つまり $f, g \in D^\infty$ のとき

$$f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)+g(x)$$

$$cf: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto cf(x)$$

と導関数 d の定義が線形空間に成る?

$$d: D^\infty \rightarrow D^\infty; f \mapsto \frac{df}{dx}$$

$$d^{(2)}: D^\infty \rightarrow D^\infty; f \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2} \text{ etc. は } D^\infty \text{ の } D^\infty$$

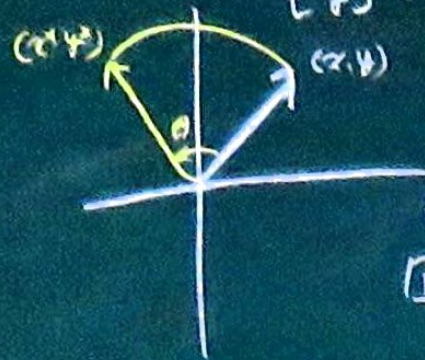
への線形写像か?

$$(1): d(f+g) = \frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} = d(f) + d(g)$$

$$(2): d(cf) = \frac{d}{dx}(cf) = c \frac{df}{dx} = c d(f)$$

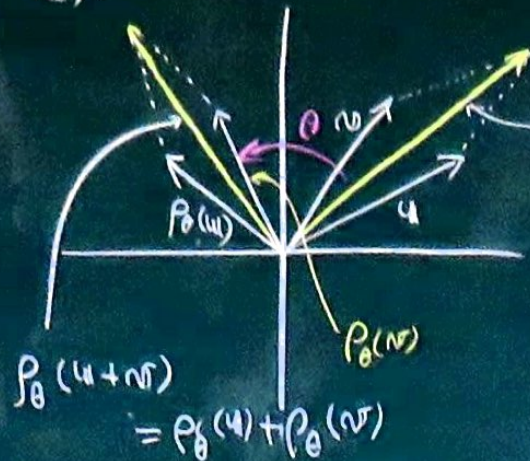
例3 $0 \leq \theta < 2\pi$ とし

$$\rho_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$$

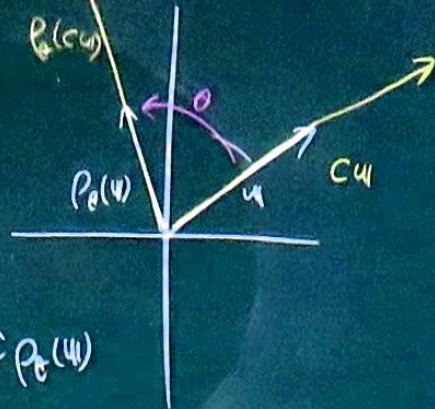


$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ を平面ベクトル (x, y) と見たとき
このベクトルを原点を中心には反時計回り
(左回り)に θ だけ
回したと見て得られる
ベクトル (x^*, y^*)
に付いて $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$

(1):



(2):



$$\rho_\theta(cu) = c\rho_\theta(u)$$

例 4 $m, n \in \mathbb{N}$ $m, n \geq 1$ に對し,

$A \in (m, n)$ -行列とすると,

$$\varphi_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n; x \mapsto Ax$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right]}^m \\ \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \\ \underbrace{\left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right]}_m \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \end{array} \right\}_m$$

$A \qquad x$

は線形写像である。実は $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像は
すべてこの形で書ける。

(1):

$$\begin{aligned} \varphi_A(x+y) &= A(x+y) = Ax + Ay \\ &= \varphi_A(x) + \varphi_A(y) \end{aligned}$$

(2): $\varphi_A(cx) = A(cx)$

$$= cAx = c\varphi_A(x).$$

$f: U \rightarrow V$ が線形写像で "1-1 onto" のとき
(全単写)

のときは f は U の線形空間としての構造を V の線形空間
としての構造と結びつけるものとして見ることが出来る。

このときには、 f は U から V への 同型写像 である。"
 U から V への同型写像が存在することから $U \cong V$ とおき、 U と V は同型である。

定理 5.3 (1) $f: U \rightarrow V$ $g: V \rightarrow W$ を線形写像とすると $g \circ f$ は U から W への線形写像である。

(2) $f: U \rightarrow V$ $g: V \rightarrow W$ が同型写像なら、
 $g \circ f: U \rightarrow W$ は同型写像である。

(3) $f: U \rightarrow V$ が同型写像なら
 $f^{-1}: V \rightarrow U$ も同型写像である。

証明 (1): 性質 (1): $g \circ f(u+v) = g(f(u+v))$
 $= g(f(u) + f(v)) = g(f(u)) + g(f(v))$
 $\uparrow$ f は線形写像 $\uparrow$ g は線形写像

$$= g \circ f(u) + g \circ f(v)$$

$$\text{性質 (2): } g \circ f(cu) = g(f(cu)) = g(cf(u))$$

$\uparrow$ 合成写像の定義

$\uparrow$ f は線形写像

$$= c g(f(u)) = c g \circ f(u)$$

$\uparrow$ g は線形写像

(2): は (1) と全単射の合成が全単射になることからよい。

$$(3): \text{性質 (1): } f^{-1}(u+v) = \text{次回}$$