

試験 予想問題集の

<http://fuchino.ddo.jp/label/>
(= upload されています)

定理 5.3 (1) $\varphi: U \rightarrow V$ $\psi: V \rightarrow W$
を線形写像とすると $\psi \circ \varphi: U \rightarrow W$
も線形写像になる。

(2) (1)で φ, ψ が同形写像 なら $\psi \circ \varphi$ も
同形写像

(3) $\varphi: U \rightarrow V$ が同形写像 なら $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$
も同形写像 なる

$\varphi: U \rightarrow V$ が 同形写像とは、

φ は 線形写像?、全単射 (1-1 onto) となること

証明 (1) (2) は 前回見た

(3) φ^{-1} が 全単射? あることはよい。

φ^{-1} が 線形写像? あることは、 $u, v \in V$
で $u_0 = \varphi^{-1}(u)$, $v_0 = \varphi^{-1}(v)$ とする。

$$\begin{aligned} \varphi(u_0 + v_0) &= \varphi(u_0) + \varphi(v_0) = \varphi(\varphi^{-1}(u)) + \varphi(\varphi^{-1}(v)) \\ &= \underbrace{u}_{\varphi \text{ の 線形写像}} + \underbrace{v}_{\varphi \text{ の 線形写像}} \end{aligned}$$

したがって φ^{-1} を 線形写像 とする。

$$\varphi^{-1}(\varphi(u_0 + v_0)) = \varphi^{-1}(u + v)$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ u_0 + v_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v) \end{array}$$

$c \in \mathbb{R}$ とし

$$\varphi(cu_0) = c\varphi(u_0) = c\varphi(\varphi^{-1}(u)) = cu$$

↑
φ は線形写像

だから両辺に φ^{-1} をかけると

$$cu = \varphi^{-1}(\varphi(cu_0)) = \varphi^{-1}(cu)$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ c\varphi^{-1}(u) \end{array}$$



$\varphi: U \rightarrow V$ と同形写像であること U と V は同形であること u に対して $U \cong V$ と書く

系 6.1 U, V, W を線形空間とすると

(1) $U \cong V, V \cong W$ ならば $U \cong W$

(2) $U \cong V$ ならば $V \cong U$

補題 6.2 (1) $m \in \mathbb{N}$ に対して $\dim(\mathbb{R}^m) = m$ である。

(2) $\mathbb{R}^n$ 上の線形空間 U, V が共に有限次元で $\dim(U) = \dim(V)$ ならば $U \cong V$

↑ U の基底 ↑ V の基底

(3) 任意の n, m 次元線形空間 V は $\mathbb{R}^n$ と同形である。

証明 (1): $1 \leq i \leq n$ に対し, 基本単位 e_i は

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}^n \quad \text{をとり, } e_i \in \mathbb{R}^n \text{ である.}$$

こ番目 $\rightarrow$ $e_1, \dots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である?

$$\left[c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \text{ として } \sum_{i=1}^n c_i e_i = 0^n \right]$$

としたい.

$c_1 = 0, \dots, c_n = 0$ と仮定する.

$e_1, \dots, e_n$ は独立である.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}} \right\}^n$$

任意 $\mathbb{R}^n$ の元 $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ は

$$a = \sum_{i=1}^n a_i e_i \text{ である.}$$

$$[e_1, \dots, e_n]_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$$

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$(2): \dim(U) = \dim(V) = n \text{ として,}$$

$\{u_1, \dots, u_n\}$ と $\{v_1, \dots, v_n\}$ をそれぞれ U と V の基底とする.

$$\varphi: U \rightarrow V; \quad \sum_{i=1}^n c_i u_i \mapsto \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

とすると $a \in U$ に対して $a = \sum_{i=1}^n c_i u_i$ とする $(c_1, \dots, c_n)$ は $u_1, \dots, u_n$ の線形独立性から一意的に決まるから, 上の定義は完結している.

Claim φ は $\cup$ 上の V 上の同型写像である。

φ は 1-1 : $a = \sum_{i=1}^m c_i u_i, b = \sum_{i=1}^m d_i u_i$ とおくと

$$\boxed{a, b \in \cup \text{で } a \neq b \text{ とすると}} \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \text{ である}$$

$u_1, \dots, u_m$ は V の基底, 故に φ の

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^m c_i v_i \neq \sum_{i=1}^m d_i v_i = \varphi(b)$$

φ は onto : $d_i \in V$ とすると $v_1, \dots, v_m$ は V の基底, 故に

$$d_i = \sum_{j=1}^m c_j v_j \text{ とある } c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \text{ があり}$$

$$\underbrace{a}_{\in \cup} = \sum_{i=1}^m c_i u_i \text{ とすると } \varphi \text{ の定義より } \varphi(a) = \sum_{i=1}^m c_i v_i = d_i$$

φ は線形写像 : $a = \sum_{i=1}^m c_i u_i, b = \sum_{i=1}^m d_i u_i$ とすると

$$\varphi(a+b) = \varphi\left(\sum_{i=1}^m (c_i + d_i) u_i\right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m (c_i + d_i) v_i \\ &\xrightarrow{\varphi \text{ の定義}} \sum_{i=1}^m c_i v_i + \sum_{i=1}^m d_i v_i \xrightarrow{\varphi \text{ の定義}} \varphi(a) + \varphi(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \in \mathbb{R} \text{ とし } & \xrightarrow{V \text{ の } + \text{ の可換性と結合則}} \varphi(ca) \xrightarrow{V \text{ 上の } \varphi \text{ の性質}} \varphi\left(c \sum_{i=1}^m c_i u_i\right) \xrightarrow{\varphi \text{ の定義}} \sum_{i=1}^m c c_i v_i = c \sum_{i=1}^m c_i v_i \\ & \xrightarrow{\cup \text{ 上の } \varphi \text{ の性質}} = c \varphi(a) \end{aligned}$$

(3): (1) + (2) より.

補題 6.3 $\dim(U) = m$ かつ $\{u_1, \dots, u_m\}$ を U

の基底とすると、 $\varphi: U \rightarrow V$, $\psi: U \rightarrow V$

が線形写像で、 $\varphi(u_i) = \psi(u_i)$ かつ

かつ $1 \leq i \leq m$ に対し成り立つとき、 $\varphi = \psi$

である。

証明 $a \in U$ を任意にとると、 $\varphi(a) = \psi(a)$

と示せばよい。

$a = \sum_{i=1}^m c_i u_i$ とする $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ である。このとき

$$\varphi(a) = \varphi\left(\sum_{i=1}^m c_i u_i\right) \underset{\varphi \text{ の線形性}}{=} \sum_{i=1}^m c_i \varphi(u_i) \underset{\varphi(u_i) = \psi(u_i)}{=} \sum_{i=1}^m c_i \psi(u_i) \underset{\psi \text{ の線形性}}{=} \psi\left(\sum_{i=1}^m c_i u_i\right) = \psi(a)$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^m c_i u_i\right) = \psi(a)$$

φ の線形性

補題 6.4 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ を線形写像とすると、

$m \times n$ -行列 A として $\varphi = \varphi_A$ と表すものが存在する。

$$(\varphi_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto Ax \quad \text{ただし } x \in \mathbb{R}^m)$$

$\mathbb{R}^m$ の基本
基底 $e_1, \dots, e_m$

$$\begin{matrix} & m \\ & \boxed{A} \\ m & \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \end{matrix}$$

φ_A が
線形写像と
なることは前回の
例 4 で見た。

証明
とる

e_i e_i は前と同じように

$1 \leq i \leq m$ に対し $a_i = \varphi(e_i^m)$ とする.

$$A = [a_1 \dots a_m]$$

とす. 各 $1 \leq i \leq m$ に対し

$$\varphi_A(e_i^m) = A e_i^m = a_i$$

$$= \varphi(e_i^m) \quad (\text{したがって})$$

補題 6.3 から, $\varphi = \varphi_A$.

$$a_i \in \mathbb{R}^n$$

$$a_i = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \Bigg\}^m$$

$$\left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = a_i$$

□

補題 6.5 A, B は $n \times m$ -行列? $A \neq B$ とする

$$\varphi_A \neq \varphi_B$$

証明 A と B は 列-ベクトルに分解して $A = [a_1 \dots a_m]$

$B = [b_1 \dots b_m]$ とすると $A \neq B$ である $1 \leq i \leq m$ として

$a_i \neq b_i$ と仮定する. $\varphi_A(e_i^m) = a_i \neq b_i = \varphi_B(e_i^m)$

だから $\varphi_A \neq \varphi_B$ である. $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

補題 6.5 から, 線形写像 φ に対し $\varphi = \varphi_A$ となる行 A は

一意に決まる. A_k と置く. $\varphi = \varphi_{A_k}$ とする.

A を $n \times m$ 行列とし $\varphi_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ を定義すると
 これは線形写像に φ_A なる φ_A に φ_A に対応して
 A_{φ_A} となる。
 (このとき φ_A の意味の)

このとき $\varphi_{A_{\varphi_A}} = \varphi_A$

つまり、
 補題 6.5 より、 $A_{\varphi_A} = A$ である

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への
 線形写像の全体 $\ni \varphi \mapsto A_\varphi \in$ $n \times m$ -行列
 の全体
 は 1-1 対応 $\varphi \mapsto A_\varphi$ である。
 (互いに逆の対応である)

補題 6.6

(1) $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ を線形写像と
 すると $A_{\psi \circ \varphi} = A_\psi A_\varphi$ である

(2) $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ が同型写像のときには、 $m=n$
 だが、このときには A_φ は正則行列
 (逆行列の存在する行列) である。逆も成り立つ

$A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}$
 (行列 A_φ の逆行列)