

補題 6.6 (1) $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ を線形写像とすると

$$A_{\varphi \circ \psi} = A_{\varphi} A_{\psi}$$

定数 $(1, 0, \dots, 0)$
線形写像

行列の積

(2) $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 同型写像とすると,
 $m=n$ とき

$$A_{\varphi^{-1}} = (A_{\varphi})^{-1}$$

逆写像
逆行列

A_{φ} = 逆行列

補題

補題 7.0 $\varphi: V \rightarrow W$ を線形写像とすると

$$\varphi(0_V) = 0_W$$

V の元

W の元

証明

$$\varphi(0_V) = \varphi(0 \cdot 0_V) = 0 \varphi(0_V) = 0_W \quad \square$$

補題 7.1 (1) $\varphi: V \rightarrow W$ 線形写像 φ が単射 φ とし,
 $a_1, \dots, a_m \in V$ が線形独立なら, $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m)$ は W で線形独立

(2) $\varphi: V \rightarrow W$ を線形写像とすると, $b_1, \dots, b_n \in W$

$a_1, \dots, a_m \in V$ 且 $\varphi(a_1) = b_1, \dots, \varphi(a_m) = b_m$ のとき,

$b_1, \dots, b_m$ が線形独立なら, $a_1, \dots, a_m$ は V で線形独立である。

W 上

(3) $\varphi: V \rightarrow W$ が同形写像の時、
 $a_1, \dots, a_m$ が V の基底だと $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m)$ は W の基底となり、逆も成り立つ。特に V が W のとらえられ、有限次元であることが分かる。
 いさぎよいは $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ である。

言ひ明 (1): 対偶を示す。 $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m)$ が W 上線形独立でないとする。このとき、全部は 0_W になるから $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}$ で $C_1 \varphi(a_1) + \dots + C_m \varphi(a_m) = 0_W$ とおけるものが存在する。 φ は線形写像だから

$$0_W = C_1 \varphi(a_1) + \dots + C_m \varphi(a_m) = \varphi(C_1 a_1 + \dots + C_m a_m)$$

補題 7.0 より $\varphi(0_V) = 0_W$ かつ φ は 1-1 である

$0_V = C_1 a_1 + \dots + C_m a_m$ とおくと $a_1, \dots, a_m$ は V 上線形独立でない。

(2): 対偶を示す。 $(1) \quad a_1, \dots, a_m \in V$ が線形独立で φ が 0_V になると全部は 0_W になるから $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}$ で $C_1 a_1 + \dots + C_m a_m = 0_V$ とおけるものが存在する。補題 7.0 より

$$\varphi(C_1 a_1 + \dots + C_m a_m) = \varphi(0_V) = 0_W$$

// $\leftarrow \varphi$ の線形性

$$C_1 \varphi(a_1) + \dots + C_m \varphi(a_m)$$

//

$$C_1 b_1 + \dots + C_m b_m$$

だから $b_1, \dots, b_m$ は線形独立でない。

(3): φ を同形写像として $a_1, \dots, a_n$ が V の基底であると、(1) より $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)$ は線形独立である。したがって $\{\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)\} \subseteq W$ とおけることを示せばよい。

$b \in W$ を任意にとり φ は W への写像だから $b = \varphi(v)$ となる $v \in V$ が存在する。 v は V の基底 $a_1, \dots, a_n$ によって表すことができる。したがって b は $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)$ の線形結合で表すことができる。

① $a \in V$ かつ $\varphi(a) = b$ となるものが存在する。
 $a_1, \dots, a_n$ は V の基底で、このとき $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ として
 $c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = a$ となるものが存在する。

$$\varphi(c_1 a_1 + \dots + c_n a_n) = \varphi(a) = b$$

← φ の線形性

$$c_1 \varphi(a_1) + \dots + c_n \varphi(a_n) \text{ となる。}$$

$$b \in [\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)]_W \text{ となる。}$$

$\dim(V) = m$ かつ $a_1, \dots, a_m \in V$ が V の基底ならば、
 $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m)$ は W の基底で、 $\dim(W) = m$ となる。
 φ^{-1} は W から V への同型写像で、同様にして、
 $\dim(W) = m$ かつ $\dim(V) = m$ となることを示せる。 □

(2) を用いる

補題 6.6 の証明 (1): $a \in \mathbb{R}^m$ として、

$$\begin{aligned} A_{\varphi \circ \psi} a &= (\varphi \circ \psi)(a) = \varphi(\psi(a)) \\ &= A_{\varphi}(A_{\psi} a) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{行列の計算の} \\ \text{結合性}}}{(A_{\varphi} A_{\psi})} a \end{aligned}$$

a は任意で、このとき、
 補題 6.5 から、

$$A_{\varphi \circ \psi} = A_{\varphi} A_{\psi} \text{ となる}$$

(2): $m = n$ として、 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ であることと補題 7.1 (3) より、

$$A_{\varphi^{-1}} A_{\varphi} = \overset{\text{補題 6.6 (4)}}{A_{\varphi \circ \varphi^{-1}}} = A_{\text{id}_{\mathbb{R}^n}} = E^n \leftarrow \begin{matrix} m \text{ 次元の} \\ \text{対角行列} \end{matrix}$$

同様に $A_p A_{p-1} = E^m$ となる。
 A_p と A_{p-1} は互いに逆行列であることがわかる。□

定理 7.3 (補題 6.6 の系)

A と B を $m \times m$ 行列とすると $AB = E^m$
 ならば A は可逆で $A^{-1} = B$ である。

証明 $AB = E^m$ ならば 定理 7.2 (1) より

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB} = \varphi_{E^m} = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$$

このことから φ_B は単射である。したがって $\varphi_B(e_1), \dots, \varphi_B(e_m)$
 は補題 7.1 (1) より線形独立で $\mathbb{R}^m$ は m 次元空間なので
 $\varphi_B(e_1), \dots, \varphi_B(e_m)$ は $\mathbb{R}^m$ の基底となる。したがって φ_B は全射でもある。
 このことから φ_A も全射となる（このことからわかる）、 $\varphi_A = (\varphi_B)^{-1}$ ②

① したがって、
 補題 7.2
 $\varphi = \varphi_A$ とする
 のとき
 $A = B^{-1}$
 である。

補題 7.2 (1) A と B を $m \times m$ 行列とすると

$$\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$$

(2) A は可逆行列とすると、 $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$
 ↑
 φ_A の逆写像と見做す

証明 (1) $A_{\varphi_{AB}} = AB$ $A_{\varphi_A} = A$

$A_{\varphi_B} = B$ (2) も同様。

したがって、補題 6.6 (1) より、

$$AB = A_{\varphi_{AB}}$$

$$A_{\varphi_A} A_{\varphi_B} = A_{\varphi_A \circ \varphi_B} \text{ であり } \varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B \text{ である。}$$

直接証明: (1): $\alpha \in \mathbb{R}^m$ とすると、
 $\varphi_{AB}(\alpha) = (AB)\alpha = A(B\alpha)$
 $= \varphi_A(\varphi_B(\alpha)) = (\varphi_A \circ \varphi_B)(\alpha)$

(2): (1) より $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}}$
 $= \varphi_{E^m} = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$, $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \varphi_{A^{-1}A}$
 $= \varphi_{E^m} = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$ (1-5)

$\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$ である。□

$\varphi: V \rightarrow W$ を線形写像とすると

$$\text{Ker}(\varphi) = \{u \in V \mid \varphi(u) = 0_W\}$$

↑
Kernel
核

$\text{Im}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{ある } u \in V \text{ に対し } \varphi(u) = w \text{ と成る}\}$

↑ image
像

補題 7.4 (1) $\text{Ker}(\varphi)$ は V の部分空間である
(2) $\text{Im}(\varphi)$ は W の部分空間である。

定理 7.6 (次元定理) $\varphi: V \rightarrow W$ を線形写像と
おとし、 $\dim(V) = m$ とおとし、 $\text{Ker}(\varphi)$ は V 部分空間
とし有限次元 $\leq m$ とおとし、

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi))$$

逆命題 7.5 $\text{Ker}(\varphi) = \{0_V\} \Leftrightarrow \varphi$ は 1-1

証明 $\Leftarrow$ $\varphi(0_V) = 0_W$ (7.4) より明

$\Rightarrow$: φ は 1-1 ならば、 $\varphi(a) = \varphi(a')$ と成る $a, a' \in V$ ならば
 $a - a' (= a + (-1)a')$ は $\text{Ker}(\varphi)$ の元である。 $\neq 0_V$

$$\begin{aligned} \varphi(a - a') &= \varphi(a) - \varphi(a') \\ &= 0_W \end{aligned}$$

よって $a - a' \in \text{Ker}(\varphi)$ とおとし、 $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0_V\}$ 。 $\square$

補題 7.6 の証明の続き 4

$$\dim(\ker(\varphi)) \leq \dim(V) = n$$

//
m < n

$a_1, \dots, a_m \in \ker(\varphi)$ の基底とする。これを拡張して

$a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ を V の基底と仮定する。

このとき、(*) $\varphi(a_{m+1}), \dots, \varphi(a_n)$ は $\operatorname{Im}(\varphi)$ の

基底に仮定を示す。 補題 7.1 の証明と
同様に示す。 $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = n - m$ である

(*) の証明: $\varphi(a_{m+1}), \dots, \varphi(a_n)$ は線形独立である:

仮定として $c_{m+1}, \dots, c_n$ を全部は 0 でない $\mathbb{R}$ の元
の列で $c_{m+1}\varphi(a_{m+1}) + \dots + c_n\varphi(a_n) = \mathbf{0}_W$ と仮定する。

$$\varphi(c_{m+1}a_{m+1} + \dots + c_na_n) = \mathbf{0}_W \text{ となる。}$$

$c_{m+1}a_{m+1} + \dots + c_na_n \in \ker(\varphi)$ となるので $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$
で $c_1a_1 + \dots + c_ma_m + c_{m+1}a_{m+1} + \dots + c_na_n = \mathbf{0}_V$

となるものがあればこれは、 $a_1, \dots, a_n$ の線形独立性に矛盾する。

$$\square \{ \varphi(a_{m+1}), \dots, \varphi(a_n) \}_W = \operatorname{Im}(\varphi) \text{ である。}$$

$u \in \operatorname{Im}(\varphi)$ である。 $a \in V$ で $\varphi(a) = u$ と仮定する。
たいてい $a = c_1a_1 + \dots + c_na_n$ と仮定する。

$$\begin{aligned} u = \varphi(a) &= \varphi(c_1a_1 + \dots + c_na_n) \\ &= \underbrace{c_1\varphi(a_1) + \dots + c_m\varphi(a_m)}_{\mathbf{0}_W} + c_{m+1}\varphi(a_{m+1}) + \dots + c_n\varphi(a_n) \end{aligned}$$

// である $\square$