講義の web page:

http://fuchino.ddo.jp/kobe/

復習 V と W を $\mathbb{R}$ 上の線形空間（ベクトル空間）とする $\varphi : V \to W$ を線形写像とする

V と W の基底が $\{v_1 \cdots v_n\}$, $\{w_1, \cdots, w_m\}$ として与えられているとする。このとき行列 $m \times n$ 行列 A で

$$\varphi\left((v_1 \cdots v_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\right) = \varphi(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = (w_1 \cdots w_m)\, A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

V が $\mathbb{R}$ 上の線形空間であるとは、V 上の演算 $+$ と $\mathbb{R}$ の要素倍（スカラー倍）の演算（とゼロ元 $\mathbb{0} \in V$ （$\mathbb{0}_V$ と書くこともある））が定義されていて、すべての $u, v, w \in V$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対し次の計算則が成り立つことである：

(1) $u + v = v + u$ （和の可換性）

(2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ （和の結合法則）

(3) $u + \mathbb{0} = \mathbb{0} + u = u$

(4) $a(bu) = (ab)u$

(5) $(a+b)u = au + bu$

実数の和の演算　Vの和の演算

(6) $a(u+v) = au + av$

(7) $1u = u$

(8) $0u = \mathbb{0}$

注 (1)

VとWを線形空間とし、0_V と 0_W をそれぞれのゼロ元とするとき、写像(関数) $\varphi : V \to W$ が線形写像であるとは、すべての $a, b \in V$、$c \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つこと

(1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

(2) $\varphi(ca) = c\varphi(a)$

補題1.1 $\varphi : V \to W$ が線形写像なら

(1) $a_1 \cdots a_m \in V$、$c_1 \cdots c_m \in \mathbb{R}$ のとき
$\varphi(c_1a_1 + \cdots + c_ma_m) = c_1\varphi(a_1) + \cdots + c_m\varphi(a_m)$ が成り立つ

(2) $\varphi(0_V) = 0_W$　(3) $0_V + 0_V = 0_V$　ア

(1) ベクトル空間の和の結合則が、$((a_1+a_2)+\cdots+a_m) = \cdots\cdots = (a_1+\cdots+(a_{m-1}+a_m))$ となるので これらの値を $a_1+a_2+\cdots+a_m$ とあらわす.

証明 (1): は 線形写像の定義での(1)(2)から明か

(2): $\varphi(0_V) = \varphi(0\,0_V) = 0\,\varphi(0_V) = 0_W$ ∎

ベクトル空間の定義の(8)

線形写像の定義の(2)

(3): ベクトル空間の定義の(3)による.

$u_1 \cdots u_m \in V$ とするとき、$[\{u_1 \cdots u_m\}]_V = \{c_1u_1 + \cdots + c_mu_m \mid c_1 \cdots c_m \in \mathbb{R}\}$ とする. $u_1 \cdots u_m$ で張られるVの部分空間

($U \subseteq V$ が Vの部分空間とは. Uは＋とスカラー倍で閉じていること.)

$[\{u_1 \cdots u_m\}]_V$ は Vの部分空間Uで $u_1 \cdots u_m \in U$ となるもの のなかで $\subseteq$ に関して最小のものである.　イ

$u_1 \cdots u_m \in V$ が線形独立であるとは

$\underbrace{c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m}_{u_1 \cdots u_m \text{の(重み } c_1 \cdots c_m \text{ をつけた)線形結合}} = 0$ $\quad c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$

となるのは, $c_1 = \cdots = c_m = 0$ となるときにかぎる ときのことをいう.

$v_1 \cdots v_m \in V$ が V の基底であるとは

$v_1 \cdots v_m$ が線形独立で

(*) $[\{v_1, \cdots, v_m\}]_V = V$ となること.

補題 1.2 $v_1 \cdots v_m$ が V の基底なら, V の任意の元 v に対して, $\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_m\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ で $(v_1 \cdots v_m)\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix} = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m = v$ となるようなものが1意に存在する.

$$\mathbb{R}^m = \left\{ \begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix} \;\middle|\; c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R} \right\}$$

証明 上のような $c_1 \cdots c_m \in \mathbb{R}$ が存在することは, (*) によりよい

もし, $(v_1 \cdots v_m)\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix} = (v_1 \cdots v_m)\begin{bmatrix}c_1'\\ \vdots\\ c_m'\end{bmatrix}$ で $\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}c_1'\\ \vdots\\ c_m'\end{bmatrix}$ とすると

$\overset{0_{\mathbb{R}^m}}{\shortparallel}$

$$(v_1 \cdots v_m)\begin{bmatrix}c_1 - c_1'\\ \vdots\\ c_m - c_m'\end{bmatrix} = (c_1 - c_1')v_1 + \cdots + (c_m - c_m')v_m = 0$$

となるが, これは $v_1, \cdots, v_m$ の線形独立性に矛盾である. したがって上のような線形結合は1意である.

※※ となるものが存在する；
一意に

証明 $1 \le j \le m$ に対し

$$\varphi(u_j) = (w_1 \cdots w_m)\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$ となる $a_{1j} \cdots a_{mj} \in \mathbb{R}$

をとると，（これらは補題1.2により一意にとれる）

$A = [a_{ij}]$ とすると，任意の $c_1 \cdots c_m$ に対し

$$\varphi\left((w_1 \cdots w_m)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}\right) = (\varphi(w_1) \cdots \varphi(w_m))\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = (w_1 \cdots w_m)A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

φは線形写像だから，

$$(w_1 \cdots w_m)A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} w_i \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i2} w_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} a_{im} w_i\right)$$ とすると

$n \times m$ 行列

$A = [a_{ij}]$

とすると，$$\big((w_1 \cdots w_m)A\big)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = (w_1 \cdots w_n)\left(A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}\right)$$

となる。（成分ごとに比べることで示せる）

※したがってこのAが求めるようなものである。一意性の証明は略。

Aをφの基底 $\{u_1 \cdots u_m\}$ $\{w_1 \cdots w_n\}$ での表現という。

特に V から V への線形写像を線形変換とよぶ

線形変換の表現行列は正方行列になる。