

例題 V, W $\mathbb{R}$ 上の線形空間
 $\{v_1, \dots, v_m\}$ と $\{w_1, \dots, w_m\}$ を V と W の基底と
 するとき, 任意の線形写像 $\varphi: V \rightarrow W$
 に対して,

$$\varphi((v_1, \dots, v_m) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}) = (v_1, \dots, v_m) A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$\swarrow$ $m \times m$ -行列

または $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ に対して成り立つ $m \times m$ -行列

A が一意に存在する!

$1 \leq j \leq m$ に対して

$$\varphi(v_j) = (v_1, \dots, v_m) \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

と表さうに $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ として $A = [a_1 \dots a_m]$

とすればよい. このとき A を φ の基底 $\{v_1, \dots, v_m\}$
 と $\{w_1, \dots, w_m\}$ による行列表現という.

$$\frac{1}{\#C} \sum_{i \in C} \tau_i \quad v_1, \dots, v_k \in V \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$$

$$(v_1 \dots v_k) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$ のことをさす。

A を $k \times l$ -行列 $A = [a_{ij}]$ とおくと

$$(v_1 \dots v_k) A = (u_1 \dots u_l)$$

と表すことができる。

$$u_i = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \dots + a_{ik} v_k \in V$$

とすると $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$

$$(+)$$

$$(v_1 \dots v_k) A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \left((v_1 \dots v_k) A \right) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

$$(v_1 \dots v_k) \left(A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \right) = (u_1 \dots u_l) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{bmatrix}$$

が成り立つ。

上で $V=W$ のときつまり, $\varphi: V \rightarrow V$
となる線形写像のとき φ は

φ は線形変換であるという $\{v_1, \dots, v_m\}$ を

V の基底とするとき, 線形変換 $\varphi: V \rightarrow V$

$\{v_1, \dots, v_m\} \subset \{v_1, \dots, v_m\}$ (左) 行列表現を

単に $\{v_1, \dots, v_m\}$ に 関する行列表現という。

$m \times m$ 行列 A が $\{v_1, \dots, v_m\}$ に関する行列表現とは,

すなわち $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ に対し,

$$\varphi\left((v_1 \dots v_m) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}\right) = (v_1 \dots v_m) A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

が成り立つことである。

特に, $V = \mathbb{R}^m$ で $v_i = e_i^m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ } _{m}
のときには A が φ の $\{e_1^m, \dots, e_m^m\}$ に関する行列表現なら

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}\right) = \varphi\left((e_1^m \dots e_m^m) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}\right) = (e_1^m \dots e_m^m) A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \textcircled{A}$$

(*)

$$(e_1^m \dots e_m^m) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = c_1 e_1^m + c_2 e_2^m + \dots + c_m e_m^m$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad (v_1 \dots v_m) E^m$$

$$= (v_1 \dots v_m)$$

$$\textcircled{2} = (e_1^m \dots e_m^m) \left(A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \right) \overset{(*)}{=} A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ (†) $\uparrow$ (*)

つまり、 $\psi\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$ が成り立つ。 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ に対し、
 成り立つ。

基底の変換 $\{v_1, \dots, v_m\}$ を V の基底とす。

$\{u_1, \dots, u_m\}$ をもう一つの基底とす。

$u_1, \dots, u_m$ はそれぞれ $v_1, \dots, v_m$ の線形結合として表わされる。
 $u_i = (v_1 \dots v_m) \begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{mi} \end{bmatrix} = P_i \quad (1 \leq i \leq m)$

とす。 $P = [P_i] = [p_1 \dots p_m]$

とすると、 $\textcircled{1} (u_1 \dots u_m) = (v_1 \dots v_m) P$ と成り立つ。

同様に $m \times m$ 行列 Q を定めて $\textcircled{2} (v_1 \dots v_m) = (u_1 \dots u_m) Q$

とす。 $\textcircled{1}$ の両辺に右から Q をかけると、

$$(v_1 \dots v_m) = (u_1 \dots u_m) Q \overset{\textcircled{1}}{\implies} (v_1 \dots v_m) P Q = (u_1 \dots u_m) P Q$$

$\parallel$ $\implies$ $(v_1 \dots v_m) E^m = (u_1 \dots u_m) Q$

$\textcircled{2}$ より $PQ = E^m$ と成り立つ。
 同様に $QP = E^m$ だから $Q = P^{-1}$

$\{v_1, \dots, v_m\}$ と $\{u_1, \dots, u_m\}$ を V の基底とする

線形変換 $\varphi: V \rightarrow V$ の $\{v_1, \dots, v_m\}$ に

対する行列表現が A であるとする。

$$\varphi\left((u_1 \dots u_m) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}\right) = \varphi\left((v_1 \dots v_m) \underbrace{P \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}}_{\text{③}}\right)$$

③ $(u_1 \dots u_m) = (v_1 \dots v_m) P$
 とおき P は正則 (可逆行列を持つ) である。

④ $(v_1 \dots v_m) = (u_1 \dots u_m) P^{-1}$ である。

$$= (v_1 \dots v_m) A P \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

A は $v_1 \dots v_m$ に対する
 φ の行列表現

φ の $\{u_1, \dots, u_m\}$ に対する
 行列表現
 である!

$$\stackrel{\text{④}}{=} (u_1 \dots u_m) \underbrace{P^{-1} A P}_{\text{④}} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

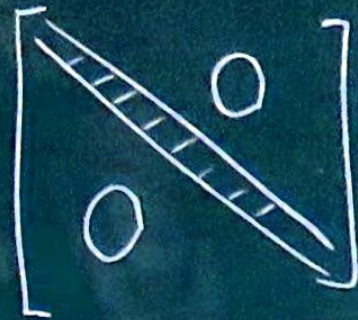
定理 2.1 (1) $\{v_1, \dots, v_m\}$ を V の
基底とし $\{u_1, \dots, u_m\}$ を V の基底とする
とき、正則行列 P 2
基底 $\{v_1, \dots, v_m\}$ 115
 $\{u_1, \dots, u_m\}$ 115
行列
 $(u_1 \dots u_m) = (v_1 \dots v_m)P$
 $(v_1 \dots v_m) = (u_1 \dots u_m)P^{-1}$ となるものが (基 1)
存在する。

(2) $\{v_1, \dots, v_m\}, \{u_1, \dots, u_m\}, P$ を (1) のようにし
 A を線形変換 φ の $\{v_1, \dots, v_m\}$ 115
表現とすると、 φ の $\{u_1, \dots, u_m\}$ 115
表現は、 $P^{-1}AP$ とする。

対角行列 $m \times m$ -行列 A が 対角行列
diagonal matrix であるとは

$A = [a_{ij}]$ とし $i \neq j$ 115 $a_{ij} = 0$ とし、115

115 とし $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{mm} \end{bmatrix}$ とし



$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}c_1 \\ a_{22}c_2 \\ \vdots \\ a_{mm}c_m \end{bmatrix}$$

正則行列 A に対し、正則行列 P
で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを求めること A の対角化
と115