

例題 目標. $m \times m$ -行列 A が与えらる

と $m \times m$ -可逆 行列 P .

逆行列
が存在

$P^{-1}AP$ が対角行列となるものを求めたい

(A の対角化)

P が求まらば, $P = [P_1 \dots P_m]$ とし, $P_1, \dots, P_m$ と

し, $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{R}^m$ とする.

(*) $P^{-1}AP = D$ とし,

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$ とする.

(*) の両辺に左から P をかけると

$(PP^{-1})AP = P(P^{-1}AP) = PD$

$E^m AP$

つまり $AP = PD$ となる.

AP

$PD = [P_1 \dots P_m] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix} = [\lambda_1 P_1 \lambda_2 P_2 \dots]$

$$AP = [AP_1 \ AP_2 \ \dots]$$

逆に A と P が $(*)$ を
 満足して P が正則な
 $P^{-1}AP$ は A の対角化
 $I = E$ となる。

ただし,
 (**)

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \dots, AP_m = \lambda_m P_m$$

正方行列 A に対し ある 0 ベクトルでないベクトル P
 と定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ により $AP = \lambda P$ とするとき
 λ を A の 固有値 とよみ P を A の
 (固有値 λ に対する) 固有ベクトル とよみ
 eigen value eigen vector

この用語を使うと, A の対角化を
 求めるには, A の固有ベクトル $P_1, P_2, \dots, P_m$
 $[P_1 \ \dots \ P_m]$ が正則になるかの計算をすればよい。

補題 3.1 (0) 0 以外の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し
 等式 $Ax = \lambda x$ を意味する

- (1) $P_1, \dots, P_k$ を A の固有値 λ に対する固有ベクトル
 とすると $P_1, \dots, P_k$ の任意の線形結合 $c_1 P_1 + \dots + c_k P_k$ は
 A の固有値 λ に対する固有ベクトルである。 (0 以外の λ に対しては $c_i \neq 0$)
- (2) $P_1, \dots, P_k$ を A の異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に対する
 固有ベクトルとすると $P_1, \dots, P_k$ は線形独立である。

(3) (2)より任意の $m \times m$ -行列に対し, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し
 $\{P \in \mathbb{R}^m \mid P \text{ は } A \text{ の 固有値 } \lambda \text{ に対する 固有ベクトル}\}$
 または $P=0$ }

とするとこれは $\mathbb{R}^m$ の部分空間になる

証明 (0): $A0 = 0 = \lambda 0$ により明らか

$$\begin{aligned} (1): A(c_1 P_1 + \dots + c_k P_k) &= c_1 A P_1 + \dots + c_k A P_k \\ &= c_1 \lambda P_1 + \dots + c_k \lambda P_k \\ &= \lambda (c_1 P_1 + \dots + c_k P_k) \end{aligned}$$

(2) $\underbrace{c_1 P_1 + \dots + c_k P_k = 0}_{(*)}$ がある $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ に対し
 立つ。

k はこのように固有ベクトル (異なる固有値に対する固有ベクトルの組で線形独立でない) のサイズとして最小のものとする。固有ベクトルはゼロベクトルでないので $k \geq 2$ 一般性を失うことなく, $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ とし, P_1 と P_2 の固有値 λ_1, λ_2 のうち $\lambda_1 \neq \lambda_2$ となるものとして一般性を失うことなく, $\lambda_1 \neq 0$ としよ。

$c_1 P_1 + \dots + c_k P_k = 0$ に対し A をかけよ
 $\Downarrow 0$

$$0 = A(c_1 P_1 + \dots + c_k P_k) = c_1 A P_1 + \dots + c_k A P_k = \lambda_1 c_1 P_1 + \dots + \lambda_k c_k P_k$$

と仮定する。このとき $\frac{1}{\lambda_1}$ をかけると、

$$c_1 P_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} c_2 P_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} c_k P_k = 0$$

このことから、(*) を使くと、

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} c_2 - c_2 \right) P_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} c_k - c_k \right) P_k = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1) c_2}{\lambda_1}}_{\neq 0}}_{\neq 0}$$

これは k の最小性に矛盾する。

(3) は (2) から明か。

$\varphi_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $x \mapsto Ax$
 とする φ_A は
 線形変換である。

$$E^m = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_m$$

定理 3.2 $A = [a_{ij}]$ を $m \times m$ -行列とすると、次の同値条件が成り立つ。
 $(a_{ij} \in \mathbb{R})$

- (1) A は正則行列である (すなわち A は逆行列を持つ)
- (2) $AB = E^m$ とする $m \times m$ 行列 B が存在する ($B = A^{-1}$ とする)
- (3) $CA = E^m$ とする $m \times m$ 行列 C が存在する ($C = A^{-1}$ とする)
- (4) φ_A が単射である。
- (5) φ_A が全射である。
- (6) φ_A が全単射である。
- (7) $\{a_1, \dots, a_m\}$ が線形独立である。
- (8) $\{a_1, \dots, a_m\}$ が $\mathbb{R}^m$ を張る。
- (9) $\{a_1, \dots, a_m\}$ が $\mathbb{R}^m$ の基底である。
- (10) $\det |A| \neq 0$

(11) $Ax = 0$ は
 自明な解しか持たない。
 証明は次回

定理 3.2 を用いると、
 A の逆行列を求めれば、
 A の固有ベクトルになる
 $\mathbb{R}^m$ の基底が求まる、
 ことがわかる。