

補講 7月26日(木) 6時限目
(この教室)
(三宮 啓太郎)

行列の対角化 $m \times m$ -行列 A に対し

$m \times m$ 正則行列 P を

(i.e. 逆行列
も存在)

可逆行列

$P^{-1}AP$ が対角行列になるように
する。 (P と $P^{-1}AP$ を
求める)

このためには、 A の固有ベクトル $p_1, \dots, p_m$ を
 $P = [p_1 \dots p_m]$ が正則になるように求めれば
よい。 このときには $P^{-1}AP$ は $p_1, \dots, p_m$ に
対応する固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ とすると (重複が
ある場合もある)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

定理 3.2 $A = [a_1 \dots a_m]$ を $m \times m$ 行列
とすると、次の同値である ($a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^m$)

- (1) A は正則である。
- (2) $AB = E^m$ となる $m \times m$ 行列 B が存在する
(このとき、 $A^{-1} = B$ となる)
- (3) $BA = E^m$ となる $m \times m$ 行列 B が存在する
(このとき、 $A^{-1} = B$ となる)
- (4) $\varphi_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m; b \mapsto Ab$ が単射である
(1-1)
- (5) φ_A が $\overset{\text{onto}}{\text{上射}}$ である (i.e. 上の射像である)
- (6) φ_A が $\overset{\text{onto}}{\text{上単射}}$ である。

- (7) $\{a_1, \dots, a_m\}$ が線形独立である
- (8) $\{a_1, \dots, a_m\}$ が $\mathbb{R}^m$ を基底とする (つまり $\mathbb{R}^m$ の基底は $a_1, \dots, a_m$ の線形結合で表わされる)
- (9) $\{a_1, \dots, a_m\}$ は $\mathbb{R}^m$ の基底である
- (10) $\det |A| \neq 0$
- (11) $Ax = 0$ は自明な解 $x = 0$ しか持たない。

A を $n \times n$ -行列とするとき $\lambda \in \mathbb{R}$ が A の
固有値 であるとは 0 ベクトルでない $p \in \mathbb{R}^n$ で
 $(*) AP = \lambda p$ となるようなものが存在すること、
 p が $(*)$ を満たすとき、 p は A の λ に対する固有
 $\times$
ベクトル であるという。

補題 3.1 (1) ゼロベクトルは $Ax = \lambda x$ を
 満たす。

(2) $p_1, \dots, p_k$ がすべて A の λ に対する固有値なら、
 $c_1 p_1 + \dots + c_k p_k$ ($c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$) は、 0 ベクトルであるか
 A の λ に対する固有ベクトルである。

(3) $p_1, \dots, p_k$ が互いに異なる A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 上
 対応する固有ベクトルになるとき、 $\{p_1, \dots, p_k\}$ は線形独立である。

補題 4.1 (補題 3.1, (3) の改定版)

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ を A の互いに異なる固有値として
 互いに異なる $1 \leq i \leq k$ に対し、

$p_1^i, \dots, p_{l_i}^i$ を固有値 λ_i に対する固有ベクトルとして、

$(*) \{p_1^i, \dots, p_{l_i}^i\}$ は線形独立である。このとき

$p_1^1, \dots, p_{l_1}^1, p_1^2, \dots, p_{l_2}^2, \dots, p_1^k, \dots, p_{l_k}^k$ は線形独立である。

証明 $c_j^i \in \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq k$ $1 \leq j \leq l_i$ に対して $\sum c_j^i p_j^i = 0$

となることを示す。

$$\sum_{i=1}^k c_i p_i = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k c_i p_{ij} \right) p_j$$

p_j

とある。補題 3.1 (2) により p_i は 0 ベクトルか
 A の λ_i に対する固有ベクトルである

したがって補題 3.1 (3) より、すなわち $1 \leq i \leq k$ に対して

$$\sum_{j=1}^k c_j p_j = 0 \text{ である。したがって } (**) \text{ より } c_j = 0$$

したがって $p_1, \dots, p_k$ は線形独立である。

A の対角化を求めよには、 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ を求め、

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に対する固有ベクトル $p_1, \dots, p_m$ を

$\{p_1, \dots, p_m\}$ が線形独立になるものを求めよ。
 (定理 3.2 (1) $\Leftrightarrow$ (2)) このときには、各固有値に対する
 固有ベクトルの組で線形独立なものを求め、これを含んだベクトルの
 m 個に取ればよい (補題 4.1)

(1) 固有値は次のようにして求められる: 固有値は定義から、
 A の方程式 $Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda E^m x$
 $\Leftrightarrow (A - \lambda E^m)x = 0$ が自明でない解を持つような λ である。
 定理 3.2 (1) $\Leftrightarrow$ (11) より、これは $\det |A - \lambda E^m| = 0$
 と同値である。したがって、方程式 $\det |A - \lambda E^m| = 0$ を解いて
 (未定数 λ に関する) 固有値が求まる

補講 7月26日(木) 6時限目
(この教室)
(三演習あり)

例 行列 $A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ の対角化

を求める。

Aの固有値を求めるにはAの固有方程式

$$(+) \quad \begin{vmatrix} -8-\lambda & 5 \\ -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ を解けばよい}$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(+) \Leftrightarrow (-8-\lambda)(3-\lambda) - 5 \times (-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow -24 + 8\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ or } \lambda = -2$$

$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8+3 & 5 \\ -6 & 3+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & \\ -6 & 6 & \\ \hline -1 & 1 & \\ -1 & 1 & \end{array}$$

$x=y$ の解の全体は

$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ と表す 4 行に

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $\lambda = -3$ に対する固有ベクトルの
一つである

検査:

$$\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 1-2, 3!!$$

$\lambda = -2$ に対する固有ベクトルは,

$$\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad -6x + 5y = 0$$

$$y = \frac{6}{5}x$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8+2 & 5 \\ -6 & 3+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ \frac{6}{5}a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ が解の全体

さらに $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ は $\lambda = -2$ に対する固有ベクトル

সিদ্ধান্ত

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ লক্সক}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ লক্সক}$$

$$P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$T = 115 \quad P = 111?$$

$$ad-bc = 1 \quad T = 115$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$