

第 10 回 線形代数 (3/20)

V は n 次元空間とする V の 2 つの
 要素 $u, v \in V$ に $\mathbb{R}$ の要素 (u, v) を
 対応させ、内積が成り立つように定める
 とす 内積 $(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\langle u, v \rangle \mapsto (u, v)$

を V の内積という
 (inner product)

$u, u', v, v' \in V, c \in \mathbb{R}$ に対し
 すべての V の中から u, v を $\mathbb{R}$ の演算としての

$$(1) (u + u', v) = (u, v) + (u', v)$$

$$(2) (cu, v) = c(u, v)$$

$\uparrow$ V のスカラー倍 $\uparrow$ 定数の掛け算

$$(3) (u, v) = (v, u)$$

(同様の定義 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で行うときには、

$$(u, v) = (v, u)^* \leftarrow \text{複素共役 とする必要がある。}$$

$$(4) u \neq 0 \text{ なら } (u, u) > 0 \text{ とする。}$$

$$\text{例 } V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{とすると } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ に対し}$$

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i \text{ と定義する } (\mathbb{R}^n \text{ の})$$

標準内積 という 二項演算は
(standard inner product)

内積の満たすべき性質 (1) ~ (4) を満たす:

$$(1): u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad u' = \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$u + u' = \begin{bmatrix} u_1 + u'_1 \\ \vdots \\ u_n + u'_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (u + u', v) = \sum_{i=1}^n (u_i + u'_i) v_i$$

$$\underbrace{u_i v_i + u'_i v_i}_{u_i v_i + u'_i v_i}$$

$$= \sum_{i=1}^n u_i v_i + \sum_{i=1}^n u'_i v_i$$

$$\begin{bmatrix} c u_1 \\ \vdots \\ c u_n \end{bmatrix}$$

$$= (u, v) + (u', v)$$

$$(2): (c u, v) = \sum_{i=1}^n c u_i v_i = c \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)$$

$$= c (u, v)$$

$$(3): (u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i u_i = (v, u)$$

$$\mathbb{R}^n \text{ 上の内積は } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ とき } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i \text{ と定義する}$$

$$(4): u \neq 0 \text{ ならば } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ とき } u_1 \dots u_n \text{ のうち少なくとも } 1 \text{ つは } 0$$

$$\text{よって } (u, u) = \sum_{i=1}^n u_i^2 > 0$$

補題 5.1 $(\cdot, \cdot)$ が V の内積ならば任意の

$$u, v, v' \in V, c \in \mathbb{R} \text{ に対し,}$$

$$(1)' (u, v + v') = (u, v) + (u, v')$$

$$(2)' (u, cv) = c(u, v)$$

$$(3)' (u, 0) = (0, u) = 0$$

証明 (1): (3)

$$(u, v + v') \stackrel{(1)}{=} (v + v', u) \stackrel{(2)}{=} (v, u) + (v', u)$$

$$\stackrel{(3)}{=} (u, v) = (u, v')$$

$$(2)': (u, cv) \stackrel{(3)}{=} (cv, u) \stackrel{(2)}{=} c(v, u) \stackrel{(3)}{=} c(u, v) \quad \square$$

$$(3)' (u, 0) = (u, 00) \stackrel{(2)}{=} 0(u, 00) = 0 \quad \square$$

$$(4) \text{ により } u \neq 0 \text{ ならば } (u, u) > 0 \text{ であり補題 5.1 (3)'} \text{ より}$$

$$(0, 0) = 0 \text{ であり } u \neq 0 \text{ とき } \|u\| = \sqrt{(u, u)} \text{ と定義する.}$$

補題 5.2 $(\cdot, \cdot)$ を V の内積とて $\|\cdot\|$ を $(\cdot, \cdot)$ が定義するノルムとすると,

$$(0) \quad \|u\| \geq 0, \quad \|u\| > 0 \Leftrightarrow u \neq 0$$

$$(1) \quad \|cu\| = |c| \|u\|$$

$$(2) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (\text{Schwarz の不等式})$$

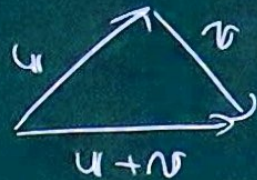
$$(3) \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{三角不等式})$$

$\mathbb{R}^n$ 標準内積を考えると, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

ベクトル u の長さ

補題 5.2 の証明: (0) は定義が明らか



$$(1): \|cu\| = \sqrt{(cu, cu)}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \sqrt{c(cu, u)} \stackrel{(2)}{=} \sqrt{c^2(u, u)} = \sqrt{c^2} \sqrt{(u, u)} = |c| \|u\|$$

$$(2): u=0 \text{ とき } (0, v) = 0 \text{ となる}$$

$$0 = |(0, v)| \leq \|0\| + \|v\| (=v), \text{ 不等式は成り立つ}$$

$$u \neq 0 \text{ とし, } t \in \mathbb{R} \text{ に対し, } \|ut + v\|^2 \text{ を考へ}$$

$$0 \leq \|ut + v\|^2 = (ut + v, ut + v)$$

$$\stackrel{(1)(1)}{=} t^2 \underbrace{(u, u)}_{>0} + 2t \underbrace{(u, v)}_{\leq \|u\|\|v\|} + \underbrace{(v, v)}_{\geq 0}$$

(2) 二次方程式 $at^2 + bt + c = 0$ となる t は必ず存在する

これが成り立つためには
二次式(右辺)の判別式が
 ≤ 0

でなければならない



第 10 回 補講 (演習)

④ 判別式は、

$$0 \geq b^2 - 4ac = |2(u, v)|^2 - 4(u, u)(v, v)$$

$$= 4(u, v)^2 - 4(u, u)(v, v) \quad \text{4.7, 4.8}$$

$$(u, u)(v, v) \geq (u, v)^2 \quad \text{両辺の } \sqrt{} \text{ をとると}$$

$$\|u\| \|v\| \geq |(u, v)| \quad \text{と証明される}$$

不等式が得られる。

$$(3): \quad \frac{\|u+v\|^2}{\|u+v\|^2} \quad (2) (2')$$

$$0 \leq (u+v, u+v) = (u, u) + 2(u, v) + (v, v)$$

↑
内積の性質 (4)

$$\leq (u, u) + 2|(u, v)| + (v, v)$$

Schwarz の
不等式

$$\leq (u, u) + 2\|u\|\|v\| + (v, v)$$

$$= \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

$$= \underline{(\|u\| + \|v\|)^2}$$

両辺の $\sqrt{}$ をとると

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{と証明される不等式が得られる。}$$

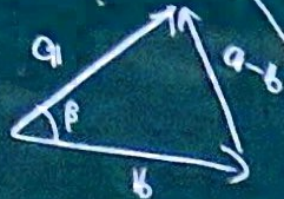
$(\cdot, \cdot)$ が V の内積の時、

V に $(\cdot, \cdot)$ をあわせて与えたものを内積空間と呼ぶ

$(V, (\cdot, \cdot))$ が内積空間の時、(内積が何へか用ゐられるときは " V を内積空間とある" と言うことにする！)

$u, v \in V$ が $u \neq 0, v \neq 0$ かつ $(u, v) = 0$ となるとき、 u, v は 直交 するという。

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ を標準内積とすると、上の意味での直交性は幾何学的な直交性と一致する。



$\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ 上

$a \neq 0, b \neq 0$ とする

よって 余弦定理は $\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\beta$ と書ける。
 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 上 $\mathbb{R}^n$ がベクトルの長さに等しいと仮定して使うと

$$\|a-b\|^2 = (a-b, a-b) = \|a\|^2 - 2(a, b) + \|b\|^2$$

これから (X) に代入して、

$$(a, b) = \|a\|\|b\|\cos\beta$$

特に $(a, b) = 0 \Leftrightarrow \cos\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Leftrightarrow a \text{ と } b \text{ は直交}$

幾何学的な意味で直交する