

$\langle V, (\cdot, \cdot) \rangle$  内積空間 とするとき、

$u, v \in V$  が 直交 するとは、 $u \neq 0, v \neq 0$

かつ  $(u, v) = 0$  とする  
 ことを定義する。  
 $(\cdot, \cdot)$  に  $(\frac{1}{\|u\|})$

定理 6.1  $\langle V, (\cdot, \cdot) \rangle$  内積空間 とするとき  
 $u_1, \dots, u_m \in V$  が  $(\cdot, \cdot)$  に 対し 直交 するとは  
 (互いに)

$\{u_1, \dots, u_m\}$  は 線形独立 である。

直交性定義  $u_1 \neq 0, \dots, u_m \neq 0$  とする。

証明

$C_1 u_1 + \dots + C_m u_m = 0, C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}$  とするとき  $\Rightarrow$

$V$  は  $\mathbb{R}$  のベクトル空間で  
 $(\cdot, \cdot)$  は内積の性質 (a) ~ (d) を満たす

$\Rightarrow C_1 = \dots = C_m = 0$  とすることを示せばよい  
 $1 \leq i \leq m$  に対し

$$0 = (u_i, 0) = (u_i, C_1 u_1 + \dots + C_m u_m)$$

$\uparrow$   
 補題 5.1  
 と基底性

$$\sum_{k=1}^m C_k (u_i, u_k)$$

$u_k, 1 \leq k \leq m$  は  
 互いに直交  
 するから

$$= C_i (u_i, u_i)$$

$\uparrow$   
 $\neq 0$

基底性 (4)

$$\Rightarrow C_i = 0$$





$\{u_1, \dots, u_m\}$  が  $V$  の基底である  $u_1, \dots, u_m$  は  
互いに直交するとき  $\{u_1, \dots, u_m\}$  は  $V$  の 直交基底  
であるという.

orthogonal basis

$\{u_1, \dots, u_m\}$  が  $V$  の基底とは,  $\{u_1, \dots, u_m\}$  は線形独立で  
 $u_1, \dots, u_m$  は  $V$  を張る (すなわち  $V$  のどの要素  $v$  も  $u_1, \dots, u_m$  の  
線形結合と表わされる)

系 6.2  $\{u_1, \dots, u_m\}$  が  $V$  の直交基底であるとは,  
 $\{u_1, \dots, u_m\}$  が  $V$  を張る  $u_1, \dots, u_m$  は互いに  
直交することと同値である.

補題 6.3  $u, v \in V$  が直交するとき  
 $c, d \in \mathbb{R}$   $c \neq 0, d \neq 0$  とすると  $cu, dv$  も直交する

証明  $c \neq 0, d \neq 0, u \neq 0, v \neq 0$  ( $\because u$  と  $v$  は直交するから)  
よって  $cu \neq 0, dv \neq 0$  である.

$$(cu, dv) = cd(u, v) = 0 \text{ である}$$

基底  
補題 5.1

0

$cu$  と  $dv$  は直交する.  $\square$



系 6.4  $\{u_1, \dots, u_m\}$  が  $V$  の直交基底のとき,

$$u'_i = \frac{1}{\|u_i\|} u_i \text{ とすると,}$$

$\{u'_1, \dots, u'_m\}$  は  $V$  の直交基底となり

各  $u'_i$  は  $\|u'_i\| = 1$  となる

証明  $u_i \neq 0$  (より)  $\|u_i\| \neq 0$  (基本性質(4))

特に  $u'_i$  は  $V$  に定義できる。

補題 6.3 より,  $\{u'_1, \dots, u'_m\}$  は互いに直交

$\{u_1, \dots, u_m\}$  は  $V$  を張るので  $\{u'_1, \dots, u'_m\}$  も  $V$  を張る

したがって系 6.2 より  $\{u'_1, \dots, u'_m\}$  は  $V$  の直交基底である

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad \|cu\| = \sqrt{(cu, cu)} = \sqrt{c^2 (u, u)} = |c| \|u\|$$

$$\|u'_i\| = \left\| \frac{1}{\|u_i\|} u_i \right\|$$

$$= \left| \frac{1}{\|u_i\|} \right| \|u_i\|$$

$$= \frac{\|u_i\|}{\|u_i\|} = 1$$

□

$\{u_1, \dots, u_m\}$  が  $V$  の直交基底で  $\|u_i\| = 1$   $1 \leq i \leq m$  ならば,

$\{u_1, \dots, u_m\}$  は  $V$  の 正規直交基底 であるという  
(on the normal basis)



例  $\mathbb{R}^n$  の標準基底  $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

ただし  $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$   
 $\mapsto$

は  $\mathbb{R}^n$  の標準内積に関して正規直交基底である。

$$(e_i, e_i) = 1 \quad \text{ただし} \quad \|e_i\| = 1$$

$$(e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j$$

定理 6.5 (グラム・シュミットの直交化法)  
 $(V, (\cdot, \cdot))$  を内積空間とする。  $\{u_1, \dots, u_n\}$  を  $V$  の基底とすると、  $V$  の正規直交基底  $\{v_1, \dots, v_n\}$  が

このように存在する。

かつ  $1 \leq k \leq n$  に対し、

$$[\{u_1, \dots, u_k\}]_V = [\{v_1, \dots, v_k\}]_V$$

が成り立つ。

Reminder:

$[\{u_1, \dots, u_k\}]_V$  は  $\{u_1, \dots, u_k\}$  によって張られる  $V$  の部分空間

$\{c_1 u_1 + \dots + c_k u_k \mid c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}$  である。



1/2 証明

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \text{ とすれば } \|v_1\| = \left\| \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \right\| \\ &= \left| \frac{1}{\|u_1\|} \right| \|u_1\| = 1 \end{aligned}$$

よって 明らか  $[\{v_1\}]_V = [\{u_1\}]_V$  である。

$$v_2' = u_2 - (v_1, u_2) v_1 \text{ とする。}$$

$\Rightarrow$  かつ  $v_2' \neq 0$  (  $\because$  線形独立だから  $u_2 \notin [\{u_1\}]_V = [\{v_1\}]_V$  )  
である。

$$(v_1, v_2') = 0 \text{ である。}$$

$$\begin{aligned} (v_1, v_2') &= (v_1, u_2 - (v_1, u_2) v_1) \\ &= (v_1, u_2) - (v_1, u_2) \underbrace{(v_1, v_1)}_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

明らか  $[\{u_1, u_2\}]_V = [\{u_1, v_2'\}]_V = [\{v_1, v_2'\}]_V$   
である  $\Rightarrow$   $v$

$$v_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2' \text{ とすれば } \|v_2\| = 1 \text{ かつ}$$

$v_1, v_2$  は (補題 6.3 により) 互いに直交する。



一般に

$$v_1, \dots, v_{k-1} \in V \text{ かつ}$$

$$\textcircled{1} \|v_i\| = 1 \quad 1 \leq i \leq k-1$$

$$\textcircled{2} v_1, \dots, v_{k-1} \text{ は互いに直交して}$$

$$\textcircled{3} [\{v_1, \dots, v_{k-1}\}]_V = [\{u_1, \dots, u_{k-1}\}]_V$$

と仮定せよ、

$$v'_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_i, u_k) v_i$$

$$\text{よって} \textcircled{1} v'_k = \frac{1}{\|v'_k\|} v'_k \text{ とおけば、}$$

$$\textcircled{1}' \|v'_i\| = 1 \quad 1 \leq i \leq k$$

$$\textcircled{2}' v_1, \dots, v_k \text{ は互いに直交して、}$$

$$\textcircled{3}' [\{v_1, \dots, v_k\}]_V = [\{u_1, \dots, u_k\}]_V$$

が成り立つ、①'は(2)より成り立つ

$v'_k \neq 0$  と仮定せよ、 $u_k \in [\{u_1, \dots, u_{k-1}\}]_V = [\{v_1, \dots, v_{k-1}\}]_V$   
と  $v'_k$  の定義より、

$$(v'_k, v_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq k-1 \text{ となる。}$$

④



④

$$\begin{aligned} (v'_k, v_c) &= (u_k - \sum_{j=1}^{k-1} (v'_j, u_k) v_j, v_c) \\ &= (u_k, v_c) - \sum_{j=1}^{k-1} (v'_j, u_k) (v_j, v_c) \end{aligned}$$

$v_1, \dots, v_{k-1}$  は直交基底

(2)

$$\begin{aligned} &= (u_k, v_c) - (v_c, u_k) \underbrace{(v_c, v_c)}_{=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって  $(v_k, v_c) = 0$  となり (2)' が成り立つ。

③' は ③ と  $v'_k$  の定義より、

$$\begin{aligned} [\{u_1, \dots, u_k\}]_V &= [\{v_1, \dots, v_{k-1}, v'_k\}]_V \\ &= [\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_k\}]_V \end{aligned}$$

により成り立つ。

この基底をとり  $v_1, \dots, v_m$  を作ると  $\{v_1, \dots, v_m\}$  は求める基底となる。  $\square$

定理 6.6  $v_1, \dots, v_m$  が  $(V, (\cdot, \cdot))$  の正規直交基底の

とき、 $\mathbb{R}^m \ni \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \mapsto a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \in V$  は  $\mathbb{R}^m$  から  $V$  への同型写像である。



内積を保存する。

つまり

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n)$$

//

$$\left( \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right)$$

↑  $\mathbb{R}^n$  の標準内積

↓  $V$  の内積

このことから,  $\mathbb{R}^n$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$  を

標準内積により

内積空間と

考えれば, 上の  
意味での“同型”を

除いて有限次元  
内積空間のすなわち  
2つある