担当: 渕野 昌　　　　　　　**微分積分 3　　自由レポート課題**　　　　　　　**2017 年 5 月 24 日**

期末試験では，計算問題が中心になる予定なので，物足りなく感じる人もいるかもしれません．それで，もう少し本格的な課題を自由レポートとして出すことにします．提出期限は 6 月 15 日とします．自然科学総合研究棟 3 号館 4 階の私のオフィスの入口に提出用の書類入れを設置します．
レポートは成績には反映させますが，これは出席点のようなものではないので，意味をなさないレポートを提出してもマイナス点が加算されるだけだ，という点には留意してください．

以下の課題では ($\boxed{4}$ を除いて)，Riemann 積分の理論を厳密に展開しようとして，Riemann 積分の定義をした直後に議論していることを想定しています．以下の命題を Riemann 積分の定義 (とその Darboux 積分による特徴付け ([1] の L-riem-6 というラベルのついた補題を参照)) のみを仮定して示してください．講義での notation を使ってください (記号や用語の使い方は，講義でのやり方にそっている限りは説明しなくてもいいですが，正確を期すためには，必要と思われる場合には定義等を繰り返してください．)．

$\boxed{1}$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能なら，$[a, b]$ 上の関数 $f + g$, fg も Riemann 積分可能で，$\int_a^b f + g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$, $\int_a^b fg\,dx = (\int_a^b f\,dx)(\int_a^b g\,dx)$ が成り立つ．

$\boxed{2}$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続関数なら，

$$h_{min} : [a, b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \min\{f(x), g(x)\},$$

$$h_{max} : [a, b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$$

で定義される関数 h_{min}, h_{max} は共に連続となる．

$\boxed{3}$ (a) 区間 $[a, b]$ (a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$) で，任意の $a \le c < d \le b$ に対し $s_{c,d} : [a, b] \to \mathbb{R}$ を

$$s_{c,d}(x) = \begin{cases} 1, & c < x < d \text{ のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

として定義する．$s_{c,d}$ は Riemann 積分可能であることを示し $\int_a^b s_{c,d}\,dx$ を求めよ．

(b) 上の (a) と $\boxed{1}$ を用いて，次を示せ:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能なら，任意の区間 $[c, d] \subseteq [a, b]$ に対し，f は $[c, d]$ 上でも Riemann 積分可能である (つまり，f を $[c, d]$ に制限した関数 $f \restriction [c, d]$ も Riemann 積分可能である)．

$\boxed{4}$ (上級問題) Riemann-Lebesgue の定理 ([1] の §1.10 を参照) を既知として，$\boxed{2}$ の改良となっている，次の主張を示せ:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能なら，

$$h_{min} : [a, b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \min\{f(x), g(x)\},$$

$$h_{max} : [a, b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$$

で定義される関数 h_{min}, h_{max} も共に Riemann 積分可能となる．

参考文献

[1] 渕野 昌，初等数学ノート，`http://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-elementary.pdf`