

以下の問題をできるかぎり解いて、問題と解答を A4の紙 にレポートとしてまとめて5月11日の講義の初めに提出してください。

ただし、解答は、結果を得るための計算過程、思考過程が分るような書き方を工夫してください。結果だけが書かれていて、それを得るための計算の工夫や考え方が述べられていないものは解答とは認めません。

この演習の問題用紙は、

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/biseki1-10s-uebung1.pdf>

としてダウンロードできます。

1. 関数が式で定義されていて、特に他に指定がない場合には、式が意味を持つような実数の全体の領域を、この関数の定義域とするのでした。このことを頭において、次の定義によって与えられた関数の定義域と値域は何かを答えてください。

$$(1) f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \quad (2) f(x) = |x+2| + \sqrt{x+1}$$

$$(3) f(x) = \log|x^2 - 4x + 3|$$

2. $f(x) = x^2 + 3x + 9$ と定義される関数と $f(x) = \frac{x^3 - 3^3}{x - 3}$ と定義される関数の違いは何かを答えてください。

3. $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ とする。ただし a, b, c, d は定数で $a \neq 0$ とする。このとき、 f^{-1} , $g \circ f$ は何になるかを答えてください。

4. \mathbb{R} 上の関数 f, g がそれぞれ逆関数 f^{-1}, g^{-1} を持つとき、(1) $g \circ f$ は逆関数を持つことを示してください。(2) この逆関数の定義域は何になるかを答えてください。(3) $(g \circ f)^{-1}$ を f^{-1} と g^{-1} を用いて表現してください。

5. 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ が存在しないことを示してください。

6. 次の値を求めてください。(1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^4 + 2x^3 - 2x + 5)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3^3}{x - 3}$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} e^{-|1/x|} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \log_{0.5} \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \text{ のとき} \\ \sin(x), & \text{それ以外} \end{cases}$$

とするとき、 $f(x)$ が連続になる点の全体は何になるかを答えてください。

8. 次の等式が(式が意味を持つような変数の値のすべてで)成り立つことを($\log(x)$ が e^x の逆関数であることを用いて)証明してください: (1) $e^x = 2^{\frac{x}{\log 2}}$ (2) $\log_{10} b = \frac{\log b}{\log 10}$ (3)

$$\log b^c = c \log b$$

9. $\log x = 5000000$ のとき、 x は十進数で表すと(小数点以上)何桁で表わされる数かを答えてください(桁数だけを答えるのではなく、なぜそう言えるのかを説明してください)。ただし、 $\log 10 = 2.302585092994046 \dots$ です。

10. 連続な関数 $f(x)$ が $f(1) = 3$, $f(2) = 4$ を満たすとき、方程式 $f(x) = \pi$ は区間 $(1, 2)$ で必ず少なくとも一つの解を持つことを、中間値の定理(教科書の p.24, 第1章定理14)を用いて説明してください。 $f(x)$ が連続でないときには、この主張が必ずしも成り立たないことを示す例を作ってください。