微分積分学I　レポート No.2 解答

1. (a) $f'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x}$.

   (b) $f'(x) = 2\sin^2 x\cos x - 4\cos x\sin x - \cos x = \cos x(3\sin^2 x - 4\sin x - 1)$.

2. g は f の逆関数であることより $g(f(x)) = x$．両辺を微分すると $g'(f(x))\cdot f'(x) = 1$，したがって $g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$． また，$f'(x) = \dfrac{-2x-1}{(x^2+x)^2}$ である．

   ここで $f(x) = \dfrac{1}{5}$ となるのは $x^2+x-5=0$，つまり $x>0$ より $x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ のとき．よって

$$g'(\frac{1}{5}) = g'(f(\frac{-1+\sqrt{21}}{2})) = \frac{1}{f'(\frac{-1+\sqrt{21}}{2})} = -\frac{25}{\sqrt{21}} = -\frac{25}{21}\sqrt{21}.$$

   別解 $y = \dfrac{1}{x^2+x}(x>0)$ とすると $y>0$． $yx^2+yx-1=0$ より $x>0$ に注意すると

   $x = \dfrac{-y+\sqrt{y^2+4y}}{2y}$，つまり $x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{4}{y}}$ である．

   よって $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}$, $g'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}}\cdot\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{4}{x}}}$.

   $g'(\dfrac{1}{5}) = -\dfrac{25}{\sqrt{1+20}} = -\dfrac{25}{21}\sqrt{21}$.

3. $h'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$ である．
   よって $h'(2) = g'(f(2))\cdot f'(2) = g'(3)\times 4 = 32$.

4. (a) ライプニッツの公式より，

$$f^{(n)}(x) = (xe^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^{(k)}(e^x)^{(n-k)} = xe^x + ne^x = e^x(x+n).$$

   (b) $n \geq 2$ に対して $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}$ であることを n に関する帰納法で示す．

   $n=2$ については，$f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ より正しい．

   n のときに等式が成り立つと仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\cdot(1+x)^{-\frac{2n-3}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)\cdot(1+x)^{-\frac{2n-3}{2}} \end{aligned}$$

よって $n+1$ のときも成り立つ.

(c) $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ であることを n に関する帰納法で示す. $n=0$ のときは明らか. n のときに等式が成り立つと仮定する. このとき,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left\{3^n \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}' = 3^{n+1}\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= 3^{n+1}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 3^{n+1}\sin\left(3x + \frac{n+1}{2}\pi\right)$$

よって $n+1$ のときも成り立つ.

5. (a)

(1) コーシーの剰余項

$R_n = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot(1+\theta x)^{-\frac{2n-1}{2}}\cdot(1-\theta)^{n-1}$ $(0<\theta<1)$

について, $|x|<1$ とすると $0 < \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ なので

$$\begin{aligned}
|R_n| &= \left|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot(1+\theta x)^{-\frac{2n-1}{2}}\cdot(1-\theta)^{n-1}\right| \\
&= \left|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\cdot(1+\theta x)^{-\frac{1}{2}}\right| \\
&\leq \left|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\right|\cdot(1-|x|)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

よって $C_n = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\frac{1}{2}(2n-1)}{n}x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(-1+\frac{1}{2n}\right)x\right| = |x|.$$

$|x|<1$ より $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$. よって $|x|<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

マクローリン展開は

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}\cdot(n-1)!}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-5)x^n + \cdots$$

(2) ラグランジュの剰余項 $R_n = \dfrac{x^n}{n!}3^n\sin\left(3\theta x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(0<\theta<1)$ について,

$\left|\sin\left(3\theta x + \dfrac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1$ より

$$|R_n| = \frac{|x|^n}{n!}\cdot 3^n\left|\sin\left(3\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{|3x|^n}{n!}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|3x|^n}{n!} = 0$ なので $|x|<\infty$ において $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

マクローリン展開は

$$\sin 3x = 3x - \frac{3^3}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n\cdot\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

(b) テイラーの定理の $n=2$ の場合,

$$\sqrt{1+0.004} = 1 + \frac{1}{2} \times 0.004 + \frac{(0.004)^2}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot (1+0.004\theta)^{-\frac{2}{3}} \ (0 < \theta < 1)$$

ここで $\theta = 0$ として近似すれば

$$\sqrt{1+0.004} \fallingdotseq 1 + 0.002 - 0.000002 = 1.001998$$

である．ここで $0 < 0.004\theta < 0.004$ より

$$0 < \sqrt{1.004} - 1.001998 < 0.000002\{1 - (1.004)^{-\frac{2}{3}}\} \fallingdotseq 5.31561853 \times 10^{-9}$$

である.

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{2\cos\theta}{-3\sin\theta}$．また，$(x, y) = \left(\dfrac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ となるのは $3\cos\theta = \dfrac{3}{2}$ かつ $2\sin\theta = \sqrt{3}$ のとき．つまり $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ かつ $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき.
よって点 $\left(\dfrac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ における微分係数は $\dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}}{-3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.
したがって，点 $\left(\dfrac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ における接線の方程式は $y - \sqrt{3} = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$，整理すると $2x + 3\sqrt{3}y = 12$.