微分積分 1　定期試験 予想問題集

担当:　渕野 昌　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**2018 年 05 月 30 日**

以下の問題のいくつかの細部を調節したものが定期試験の基本問題となります．（最低線でも）これらの問題が解けるよう準備しておいてください．試験はすべて持ち込み可です．

　ただし，これらのタイプの問題以外にも，もう少し challenging な問題も 1 題くらい出る可能性はあります．

　このプリントのファイルは，

`http://fuchino.ddo.jp/kobe/biseki1-ss18-pre-final-exam.pdf`

としてダウンロードできます．このファイルは，講義の進展に応じて，試験直前まで，随時，変更／拡張される可能性があります．何度かチェックしてみてください．

I.　(1) $\{a_n\}$ を任意の点列として，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$b_n = a_{n+1}$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to} b_n$ となる (つまり，片方の極限が存在するときにはもう片方も存在して，そのときの極限の値は等しくなる) ことを示せ．$\{b_n\}$ を $\{a_n\}$ の任意の部分点列とするときには，上の意味での等式は必ずしも成り立たないことを示せ．

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．a を任意の実数として，数列 $\{a_n\}$ を $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ により定義する．$\{a_n\}$ が収束するとして，$b = \lim_{n\to\infty} a_n$ とすると，$f(b) = b$ が成り立つことを示せ．

II.　$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ として，$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を微分可能で導関数が連続となるようなものとする．平均値の定理と，中間値の定理から，次が言えることを示せ．

(1) (a)　$f'(x) = 0$ となる $x \in [a, b]$ が存在しないとき，f は狭義単調 (真に単調) であることを示せ．(b)　更に，$f(a) < 0$, $f(b) > 0$ であるときには，f は単調増加で，$f(x) = 0$ となる $x \in (a, b)$ がちょうど一つ存在する．

(2)　$f'(x) = 0$ となる点 $x \in [a, b]$ が，ちょうど m 個 存在するとき，$f(x) = 0$ となるような $x \in [a, b]$ は全部で $m + 1$ 以下しか存在しない．

(3)　f が $[a, b]$ で増加なとき，$N = \{c \in [a, b] : f'(c) = 0\}$ が有限なら，N の各点で f' は極小になる．

III.

(1)　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，$a \in \mathbb{R}$ として，$f(a) = b$, $g(b) = c$ で，$f'(a) = d$, $g'(b) = u$ とする．このとき，f と g の合成関数のグラフの $x = a$ での接線のグラフを求めよ．

(2)　$f : I \to J$ は真に単調で微分可能とし，$J = f[I]$ とする．f が微分可能で，$a \in I$ として，$f(a) = b$, $f'(a) = c$ のとき，グラフ $y = f^{-1}(x)$ の $x = b$ での接線のグラフを求めよ．

$\boxed{\text{IV.}}$ Taylor の定理 (の講義で述べたヴァリエーション) は，次のように記述できる:

f を関数として，$a, x \in \mathbb{R}$ が f の定義域に含まれており，f が x と a の間の閉区間で n 回微分可能なら，

$$(\ast)\quad f(x) = f(a) + \frac{1}{1\,!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2\,!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a+\theta_{n,x}(x-a))(x-a)^n$$

となる，$0 < \theta_{n,x} < 1$ が存在する．

$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a+\theta_{n,x}(x-a))(x-a)^n$ は剰余項 (remainder term) と呼ばれ，R_n と表されることもある．R_n の値は，$f(x)-(\frac{1}{1\,!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2\,!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1})$ として一意に決まるが，この表現に現れる，各 $\theta_{n,x}$ は，$n \in (0,1)$ は必ずしも一意に決まらないことを注意しておく．

(1) $f(x) = xe^{-x}$ として，$n = 3$, $a = 1$ とするとき，($\ast$) が何になるかを示せ．

ある関数 f に対し，a と x を f の定義域に含まれる点として，f が a と x の間の閉区間で ∞-回微分可能 (つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し n-回微分可能) で，上のような R_n を n ごとにとると，$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となるときには，

$$(\dagger)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

と書ける．ただし，$f^{(0)}$ で f 自身を表わし，$0! = 1$ とする．($\dagger$) を f の Taylor 展開 (Taylor expansion) とよび，$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となることを f は x で Taylor 展開可能である，という．特に ($\dagger$) で $a = 0$ とすると，

$$(+)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

となるが，この形の f の表現を f の Maclaurin 展開とよぶ．対応する R_n, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となることを f は x で Maclaurin 展開可能である，という．

(2) $f(x) = e^x$ とするとき，$f(x)$ はすべての $x \in \mathbb{R}$ で Maclaurin 展開可能であることを示せ．$f(x)$ の Maclaurin 展開を求めよ．