構造の数理
2012 年 01 月 12 日　第 10 回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

Ramsey の定理　(1)

(17. Januar 2012 (19:59 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

パーティーの客

定理. (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ.

パーティーの客

定理. (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ.

パーティーの客

定理. (パーティーの 6 人の客)
パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ.

1998 年 3 月にアメリカ，アイダホ州のボイジー州立大学で開かれた学会でのランチ・パーティー

パーティーの客

定理． (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ．

証明．

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を g_0, $g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合． . . .

パーティーの客

定理． (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ．

証明．

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合． ...

パーティーの客

定理． (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ．

証明．

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合． . . .

パーティーの客

定理． (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ．

証明．

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．
たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
▷ もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
▷ そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合． . . .

パーティーの客

定理． (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ．

証明．

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \dots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \dots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合． . . .

定理． (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ．

証明．

- ▶ パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- ▶ **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - ▷ もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - ▷ そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- ▶ **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合． . . .

パーティーの客

定理． (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ．

証明．

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合． . . .

パーティーの客

定理． (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ．

証明．

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合．　. . .

パーティーの客

定理． (パーティーの 6 人の客)

パーティーに 6 人 (以上) の客が招かれたとき，必ず，a) このうちの 3 人で全員互に知合いであるような人がいるか，b) このうちの 3 人で，全員互に知合いでないような人がいるか，少なくともどちらかが必ず成り立つ．

証明．

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合． . . .

パーティーの客 (証明の続き)

証明.

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する.
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合. たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする.
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ.
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ.
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合.

この場合には，g_0 と知合いでないような客が，$g_1, \ldots, g_5$ のうちに 3 人以上いる．このような客の 3 人について，場合 1 でと同様の議論をすると，この場合にも定理が成り立つことが示せる (演習).

□

証明.

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合．

この場合には，g_0 と知合いでないような客が，$g_1, \ldots, g_5$ のうちに 3 人以上いる．このような客の 3 人について，場合 1 でと同様の議論をすると，この場合にも定理が成り立つことが示せる (演習).

□

パーティーの客 (証明の続き)

証明.

- パーティーの客のうちの (互いに異なる) 6 人を $g_0, g_1, \ldots, g_5$ として，g_0 に着目する．
- **(場合 1)** g_0 が $g_1, \ldots, g_5$ のうちの 3 人以上を知っている場合．たとえば，g_1, g_2, g_3 が g_0 と知合いだとする．
  - もし，g_1, g_2, g_3 のどの 2 人も互いに知合いでないとすると，この 3 人は b) の例となっているから，定理が成り立つ．
  - そうでないなら，たとえば g_1 と g_2 がお互いに知合いなら，g_0, g_1, g_2 は a) の例となっているから，再び定理が成り立つ．
- **(場合 2)** 場合 1 が成り立たない場合．

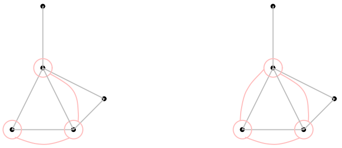
この場合には，g_0 と知合いでないような客が，$g_1, \ldots, g_5$ のうちに 3 人以上いる．このような客の 3 人について，場合 1 でと同様の議論をすると，この場合にも定理が成り立つことが示せる (演習).

□

グラフ理論による言い換え

パーティーの各々の客を頂点として “互いに知合いである” という関係を辺としてグラフを考えることで，上の「定理」はグラフの理論での命題に翻訳できる．

- K_n で n 個の頂点を持つグラフですべての 2 つの異る頂点が辺でつながっているようなもの (完全グラフ) をあらわすのだった．
- E_n で n 個の頂点を持つグラフで，辺を 1 つも持たないようなもの (空 (くう) グラフ, empty graph) をあらわすことにする．
- グラフ H がグラフ G から誘導された部分グラフ (induced subgraph) とは，H の頂点の全体は G の頂点の全体の部分集合で，H の任意の 2 つの頂点が辺でつながっていることと，これらの頂点が G で辺でつながっていることが同値になることである．

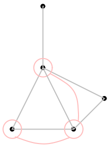


誘導された部分グラフではない部分グラフ　　誘導された部分グラフ

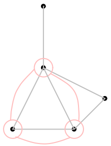
グラフ理論による言い換え

パーティーの各々の客を頂点として“互いに知合いである”という関係を辺としてグラフを考えることで，上の「定理」はグラフの理論での命題に翻訳できる．

- K_n で n 個の頂点を持つグラフですべての 2 つの異る頂点が辺でつながっているようなもの (完全グラフ) をあらわすのだった．
- E_n で n 個の頂点を持つグラフで，辺を 1 つも持たないようなもの (空 (くう) グラフ, empty graph) をあらわすことにする．
- グラフ H がグラフ G から誘導された部分グラフ (induced subgraph) とは，H の頂点の全体は G の頂点の全体の部分集合で，H の任意の 2 つの頂点が辺でつながっていることと，これらの頂点が G で辺でつながっていることが同値になることである．



誘導された部分グラフではない部分グラフ

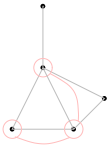


誘導された部分グラフ

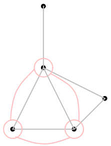
グラフ理論による言い換え

パーティーの各々の客を頂点として“互いに知合いである”という関係を辺としてグラフを考えることで，上の「定理」はグラフの理論での命題に翻訳できる．

- K_n で n 個の頂点を持つグラフですべての 2 つの異る頂点が辺でつながっているようなもの (完全グラフ) をあらわすのだった．
- E_n で n 個の頂点を持つグラフで，辺を 1 つも持たないようなもの (空 (くう) グラフ, empty graph) をあらわすことにする．
- グラフ H がグラフ G から誘導された部分グラフ (induced subgraph) とは，H の頂点の全体は G の頂点の全体の部分集合で，H の任意の 2 つの頂点が辺でつながっていることと，これらの頂点が G で辺でつながっていることが同値になることである．



誘導された部分グラフではない部分グラフ

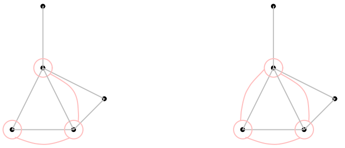


誘導された部分グラフ

グラフ理論による言い換え

パーティーの各々の客を頂点として“互いに知合いである”という関係を辺としてグラフを考えることで，上の「定理」はグラフの理論での命題に翻訳できる．

- K_n で n 個の頂点を持つグラフですべての 2 つの異る頂点が辺でつながっているようなもの (完全グラフ) をあらわすのだった．
- E_n で n 個の頂点を持つグラフで，辺を 1 つも持たないようなもの (空 (くう) グラフ, empty graph) をあらわすことにする．
- グラフ H がグラフ G から誘導された部分グラフ (induced subgraph) とは，H の頂点の全体は G の頂点の全体の部分集合で，H の任意の 2 つの頂点が辺でつながっていることと，これらの頂点が G で辺でつながっていることが同値になることである．

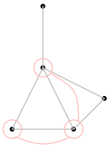


誘導された部分グラフではない部分グラフ　　誘導された部分グラフ

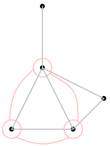
グラフ理論による言い換え

パーティーの各々の客を頂点として“互いに知合いである”という関係を辺としてグラフを考えることで，上の「定理」はグラフの理論での命題に翻訳できる．

- K_n で n 個の頂点を持つグラフですべての 2 つの異る頂点が辺でつながっているようなもの (完全グラフ) をあらわすのだった．
- E_n で n 個の頂点を持つグラフで，辺を 1 つも持たないようなもの (空 (くう) グラフ, empty graph) をあらわすことにする．
- グラフ H がグラフ G から誘導された部分グラフ (induced subgraph) とは，H の頂点の全体は G の頂点の全体の部分集合で，H の任意の 2 つの頂点が辺でつながっていることと，これらの頂点が G で辺でつながっていることが同値になることである．



誘導された部分グラフではない部分グラフ

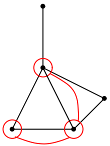


誘導された部分グラフ

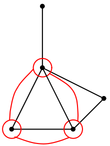
グラフ理論による言い換え

パーティーの各々の客を頂点として“互いに知合いである”という関係を辺としてグラフを考えることで，上の「定理」はグラフの理論での命題に翻訳できる．

- K_n で n 個の頂点を持つグラフですべての 2 つの異る頂点が辺でつながっているようなもの (完全グラフ) をあらわすのだった．
- E_n で n 個の頂点を持つグラフで，辺を 1 つも持たないようなもの (空 (くう) グラフ, empty graph) をあらわすことにする．
- グラフ H がグラフ G から誘導された部分グラフ (induced subgraph) とは，H の頂点の全体は G の頂点の全体の部分集合で，H の任意の 2 つの頂点が辺でつながっていることと，これらの頂点が G で辺でつながっていることが同値になることである．



誘導された部分グラフ
ではない部分グラフ



誘導された部分グラフ

グラフ理論による言い換え

パーティーの各々の客を頂点として "互いに知合いである" という関係を辺としてグラフを考えることで，上の「定理」はグラフの理論での命題に翻訳できる．

- K_n で n 個の頂点を持つグラフですべての 2 つの異る頂点が辺でつながっているようなもの (完全グラフ) をあらわすのだった．
- E_n で n 個の頂点を持つグラフで，辺を 1 つも持たないようなもの (空 (くう) グラフ, empty graph) をあらわすことにする．
- グラフ H がグラフ G から誘導された部分グラフ (induced subgraph) とは，H の頂点の全体は G の頂点の全体の部分集合で，H の任意の 2 つの頂点が辺でつながっていることと，これらの頂点が G で辺でつながっている
ことが同値になることである．

定理． 6 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_3 か E_3 の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

グラフ理論による言い換え (2/2)

定理． 6 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_3 か E_3 の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- 上で,「G に E_3 を誘導された部分グラフとして埋め込むことができる」とは，G の 3 つの頂点で互いに (G の) 辺で繋がっていないものが存在する，ということである．
- 上で,「G に K_3 を（誘導された）部分グラフとして埋め込むことができる」とは，G の 3 つの頂点で互いに (G の) 辺で繋がっているものが存在する，ということである．

問題． 任意の自然数 m に対して，

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在するか？

グラフ理論による言い換え (2/2)

定理． 6 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_3 か E_3 の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- 上で,「G に E_3 を誘導された部分グラフとして埋め込むことができる」とは，G の 3 つの頂点で互いに (G の) 辺で繋がっていないものが存在する，ということである．
- 上で,「G に K_3 を（誘導された）部分グラフとして埋め込むことができる」とは，G の 3 つの頂点で互いに (G の) 辺で繋がっているものが存在する，ということである．

問題． 任意の自然数 m に対して，

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在するか？

グラフ理論による言い換え (2/2)

定理． 6 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_3 か E_3 の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- 上で，「G に E_3 を誘導された部分グラフとして埋め込むことができる」とは，G の 3 つの頂点で互いに (G の) 辺で繋がっていないものが存在する，ということである．
- 上で，「G に K_3 を（誘導された）部分グラフとして埋め込むことができる」とは，G の 3 つの頂点で互いに (G の) 辺で繋がっているものが存在する，ということである．

問題． 任意の自然数 m に対して，

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在するか？

グラフ理論による言い換え (2/2)

定理． 6 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_3 か E_3 の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- 上で,「G に E_3 を誘導された部分グラフとして埋め込むことができる」とは，G の 3 つの頂点で互いに (G の) 辺で繋がっていないものが存在する，ということである．
- 上で,「G に K_3 を（誘導された）部分グラフとして埋め込むことができる」とは，G の 3 つの頂点で互いに (G の) 辺で繋がっているものが存在する，ということである．

問題． 任意の自然数 m に対して，

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在するか？

Ramsey の定理 (の特殊な形)

問題. 任意の自然数 m に対して,

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在するか？

YES! Ramsey (1928 年 (昭和 3 年))
— これよりもっと一般的な存在定理を証明している.

YES! Erdős & Szekeres (1935 年 (昭和 10 年))
— Ramsey の結果とは独立に得られている. n の値の評価を与えている.

Ramsey の定理 (の特殊な形)

問題. 任意の自然数 m に対して,

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在するか？

YES! Ramsey (1928 年 (昭和 3 年))
— これよりもっと一般的な存在定理を証明している.

YES! Erdős & Szekeres (1935 年 (昭和 10 年))
— Ramsey の結果とは独立に得られている. n の値の評価を与えている.

Ramsey の定理 (の特殊な形)

問題. 任意の自然数 m に対して,

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在するか?

YES! Ramsey (1928 年 (昭和 3 年))
— これよりもっと一般的な存在定理を証明している.

YES! Erdős & Szekeres (1935 年 (昭和 10 年))
— Ramsey の結果とは独立に得られている. n の値の評価を与えている.

Erdös-Szekeres の定理

定理． 任意の自然数 m に対して，

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在する．

- 帰納法で証明する．
- 証明を帰納法に乗せるために，もとの主張ではなく，それよりさらに一般的でより強い主張を証明する，という前にも何度か出てきたパターンを用いる:

定理 (Erdös-Szekeres, 1935)． m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

定理. 任意の自然数 m に対して,

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在する.

- 帰納法で証明する.
- 証明を帰納法に乗せるために, もとの主張ではなく, それよりさらに一般的でより強い主張を証明する, という前にも何度か出てきたパターンを用いる:

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする. 頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには, K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

Erdös-Szekeres の定理

定理. 任意の自然数 m に対して,

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在する.

- 帰納法で証明する.
- 証明を帰納法に乗せるために, もとの主張ではなく, それよりさらに一般的でより強い主張を証明する, という前にも何度か出てきたパターンを用いる:

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする. 頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには, K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

定理. 任意の自然数 m に対して,

- n 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 n が存在する.

- 帰納法で証明する.
- 証明を帰納法に乗せるために, もとの主張ではなく, それよりさらに一般的でより強い主張を証明する, という前にも何度か出てきたパターンを用いる:

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする. 頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには, K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

Erdös-Szekeres の定理 (2/2)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数をあらわす．

$\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \dfrac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．

- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/2)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数をあらわす．

$\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \dfrac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．

- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/2)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数をあらわす．

  $\binom{k}{\ell} = \frac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \frac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．
- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/2)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数をあらわす．

$\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \dfrac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．

- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/2)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数をあらわす．

$\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \dfrac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．

- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/2)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数をあらわす．

$\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \dfrac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．

- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/2)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数をあらわす．

$\binom{k}{\ell} = \frac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \frac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．

- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

ラムズィー (Ramsey) 現象の下限

- Erdős-Szekeres の定理の証明は次回見ることにする.
- 上の系から，すべての整数 m に対して

> 頂点の数が n 以上の任意のグラフには， K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

となるような n が存在することがわかる．そのような n のうちの最小数 (これはラムズィー数とよばれている) は，m が大きくなると爆発的に増えることが知られている:

> **定理 (Erdős, 1946 (昭和 21))** $m \geq 2$ として，任意の $n \leq 2^{\frac{m}{2}}$ に対し，n 個の頂点を持つグラフで K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在する.

ラムズィー (Ramsey) 現象の下限

- Erdős-Szekeres の定理の証明は次回見ることにする．
- 上の系から，すべての整数 m に対して

> 頂点の数が n 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

となるような n が存在することがわかる．そのような n のうちの最小数 (これはラムズィー数とよばれている) は，m が大きくなると爆発的に増えることが知られている:

> **定理 (Erdős, 1946 (昭和 21))** $m \geq 2$ として，任意の $n \leq 2^{\frac{m}{2}}$ に対し，n 個の頂点を持つグラフで K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在する．

ラムズィー (Ramsey) 現象の下限

- Erdős-Szekeres の定理の証明は次回見ることにする．
- 上の系から，すべての整数 m に対して

頂点の数が n 以上の任意のグラフには， K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

となるような n が存在することがわかる．そのような n のうちの最小数 (これはラムズィー数とよばれている) は， m が大きくなると爆発的に増えることが知られている:

定理 (Erdős, 1946 (昭和 21)) $m \geq 2$ として，任意の $n \leq 2^{\frac{m}{2}}$ に対し， n 個の頂点を持つグラフで K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在する．

ラムズィー (Ramsey) 現象の下限 (2/2)

定理 (Erdős, 1946 (昭和 21)) $m \geq 2$ として，任意の $n \leq 2^{\frac{m}{2}}$ に対し，n 個の頂点を持つグラフで K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在する．

証明のスケッチ． ▶ n 個の頂点を持つグラフは (同型なものも重複して数えると) $2^{\binom{n}{2}}$ 個ある． ▶ 一方，n 個の頂点から m 個を選んで，これらの m 個の頂点は全部互いに結ばれている (つまり K_m と同型になっている) ものは，$2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 個ある．n 個の頂点から m 個を選ぶ選び方は，$\binom{n}{m}$ 個あるから，K_m を含む頂点が n 個のグラフの総数は $\binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 以下である． ▷ 同様に，E_m を誘導された部分グラフとして含むものも高々同じ個数しかない． ▶ ところが，$2^{\binom{n}{2}} - 2 \cdot \binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}} > 0$ が示せるので，少なくともこの数だけ K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在することがわかる． □

ラムズィー (Ramsey) 現象の下限 (2/2)

定理 (Erdős, 1946 (昭和 21)) $m \geq 2$ として，任意の $n \leq 2^{\frac{m}{2}}$ に対し，n 個の頂点を持つグラフで K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在する．

証明のスケッチ. ▶ n 個の頂点を持つグラフは (同型なものも重複して数えると) $2^{\binom{n}{2}}$ 個ある．▶ 一方，n 個の頂点から m 個を選んで，これらの m 個の頂点は全部互いに結ばれている (つまり K_m と同型になっている) ものは，$2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 個ある．n 個の頂点から m 個を選ぶ選び方は，$\binom{n}{m}$ 個あるから，K_m を含む頂点が n 個のグラフの総数は $\binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 以下である．▷ 同様に，E_m を誘導された部分グラフとして含むものも高々同じ個数しかない．▶ ところが，$2^{\binom{n}{2}} - 2 \cdot \binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}} > 0$ が示せるので，少なくともこの数だけ K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在することがわかる． □

ラムズィー (Ramsey) 現象の下限 (2/2)

定理 (Erdős, 1946 (昭和 21)) $m \geq 2$ として，任意の $n \leq 2^{\frac{m}{2}}$ に対し，n 個の頂点を持つグラフで K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在する．

証明のスケッチ． ▶ n 個の頂点を持つグラフは (同型なものも重複して数えると) $2^{\binom{n}{2}}$ 個ある． ▶ 一方，n 個の頂点から m 個を選んで，これらの m 個の頂点は全部互いに結ばれている (つまり K_m と同型になっている) ものは，$2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 個ある．n 個の頂点から m 個を選ぶ選び方は，$\binom{n}{m}$ 個あるから，K_m を含む頂点が n 個のグラフの総数は $\binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 以下である． ▷ 同様に，E_m を誘導された部分グラフとして含むものも高々同じ個数しかない． ▶ ところが，$2^{\binom{n}{2}} - 2 \cdot \binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}} > 0$ が示せるので，少なくともこの数だけ K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在することがわかる． □

ラムズィー (Ramsey) 現象の下限 (2/2)

定理 (Erdős, 1946 (昭和 21)) $m \geq 2$ として，任意の $n \leq 2^{\frac{m}{2}}$ に対し，n 個の頂点を持つグラフで K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在する．

証明のスケッチ． ▶ n 個の頂点を持つグラフは (同型なものも重複して数えると) $2^{\binom{n}{2}}$ 個ある． ▶ 一方，n 個の頂点から m 個を選んで，これらの m 個の頂点は全部互いに結ばれている (つまり K_m と同型になっている) ものは，$2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 個ある．n 個の頂点から m 個を選ぶ選び方は，$\binom{n}{m}$ 個あるから，K_m を含む頂点が n 個のグラフの総数は $\binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 以下である． ▷ 同様に，E_m を誘導された部分グラフとして含むものも高々同じ個数しかない． ▶ ところが，$2^{\binom{n}{2}} - 2 \cdot \binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}} > 0$ が示せるので，少なくともこの数だけ K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在することがわかる． □

ラムズィー (Ramsey) 現象の下限 (2/2)

定理 (Erdős, 1946 (昭和 21)) $m \geq 2$ として，任意の $n \leq 2^{\frac{m}{2}}$ に対し，n 個の頂点を持つグラフで K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在する．

証明のスケッチ． ▶ n 個の頂点を持つグラフは (同型なものも重複して数えると) $2^{\binom{n}{2}}$ 個ある． ▶ 一方，n 個の頂点から m 個を選んで，これらの m 個の頂点は全部互いに結ばれている (つまり K_m と同型になっている) ものは，$2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 個ある．n 個の頂点から m 個を選ぶ選び方は，$\binom{n}{m}$ 個あるから，K_m を含む頂点が n 個のグラフの総数は $\binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 以下である． ▷ 同様に，E_m を誘導された部分グラフとして含むものも高々同じ個数しかない． ▶ ところが，$2^{\binom{n}{2}} - 2 \cdot \binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}} > 0$ が示せるので，少なくともこの数だけ K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在することがわかる． □

ラムズィー (Ramsey) 現象の下限 (2/2)

定理 (Erdős, 1946 (昭和 21)) $m \geq 2$ として，任意の $n \leq 2^{\frac{m}{2}}$ に対し，n 個の頂点を持つグラフで K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在する．

証明のスケッチ． ▶ n 個の頂点を持つグラフは (同型なものも重複して数えると) $2^{\binom{n}{2}}$ 個ある． ▶ 一方，n 個の頂点から m 個を選んで，これらの m 個の頂点は全部互いに結ばれている (つまり K_m と同型になっている) ものは，$2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 個ある．n 個の頂点から m 個を選ぶ選び方は，$\binom{n}{m}$ 個あるから，K_m を含む頂点が n 個のグラフの総数は $\binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}}$ 以下である． ▷ 同様に，E_m を誘導された部分グラフとして含むものも高々同じ個数しかない． ▶ ところが，$2^{\binom{n}{2}} - 2 \cdot \binom{n}{m} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{m}{2}} > 0$ が示せるので，少なくともこの数だけ K_m も E_m も誘導された部分グラフとして埋め込めないものが存在することがわかる． □

ラムズィー (Frank P. Ramsey)

Frank Plumpton Ramsey
(22 February 1903 (明治 36 年)
– 19 January 1930 (昭和 5 年))
was a British mathematician who, in addition to mathematics, made significant and precocious contributions in philosophy and economics before his death at the age of 26. He was a close friend of Ludwig Wittgenstein, and was instrumental in translating Wittgenstein's Tractatus Logico-Philosophicus into English, and in persuading Wittgenstein to return to philosophy and Cambridge.

— Wikipedia, the free encyclopedia
"Frank P. Ramsey" の項目から

ラムズィー (Frank P. Ramsey)

Frank Plumpton Ramsey
(22 February 1903 (明治 36 年)
– 19 January 1930 (昭和 5 年))
was a British mathematician who, in addition to mathematics, made significant and precocious contributions in philosophy and economics before his death at the age of 26. He was a close friend of Ludwig Wittgenstein, and was instrumental in translating Wittgenstein's Tractatus Logico-Philosophicus into English, and in persuading Wittgenstein to return to philosophy and Cambridge.

— Wikipedia, the free encyclopedia
"Frank P. Ramsey" の項目から

演習問題

演習問題 1. (初級問題)

任意の 18 個以上の頂点を持つグラフには，K_4 か E_4 の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

が成り立つことが知られています．この主張を，"パーティーの客" の文脈に翻訳してみてください．

演習問題 2. (中級問題) "パーティーの 6 人の客" の定理で "6 人" を "5 人" に置き換えた主張は正しくないことを示してください．

参考文献．

[1] ピーター・フランクル，代数の閃き，数学セミナー，vol.50, no.1, (2011), 50–53.

演習問題

演習問題 1. (初級問題)

任意の 18 個以上の頂点を持つグラフには，K_4 か E_4 の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

が成り立つことが知られています．この主張を，“パーティーの客” の文脈に翻訳してみてください．

演習問題 2. (中級問題) “パーティーの 6 人の客” の定理で “6 人” を “5 人” に置き換えた主張は正しくないことを示してください．

参考文献．

[1] ピーター・フランクル，代数の閃き，数学セミナー，vol.50, no.1, (2011), 50–53.

演習問題 1. (初級問題)

> 任意の 18 個以上の頂点を持つグラフには，K_4 か E_4 の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

が成り立つことが知られています．この主張を，“パーティーの客” の文脈に翻訳してみてください．

演習問題 2. (中級問題) “パーティーの 6 人の客” の定理で “6 人” を “5 人” に置き換えた主張は正しくないことを示してください．

参考文献．

[1] ピーター・フランクル，代数の閃き，数学セミナー，vol.50, no.1, (2011), 50–53.

演習問題 1. (初級問題)

任意の 18 個以上の頂点を持つグラフには，K_4 か E_4 の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

が成り立つことが知られています．この主張を，“パーティーの客”の文脈に翻訳してみてください．

演習問題 2. (中級問題) “パーティーの 6 人の客”の定理で“6 人”を“5 人”に置き換えた主張は正しくないことを示してください．

参考文献．

[1] ピーター・フランクル，代数の閃き，数学セミナー，vol.50, no.1, (2011), 50–53.